

# 基礎力学演習 第3回 抵抗中の運動

2018年10月5日 担当：佐藤 純

**問題 1** 以下の微分方程式を初期条件  $(x, y) = (0, 1)$  のもとで解け。  
また、得られた解を微分することにより、元の微分方程式を満たすことを確かめよ。

(1-1)  $y' = 3y$

(1-2)  $y' = x(2 - y)$

**問題 2** 反応速度定数  $k$  の化学反応



を考える。初期時刻  $t = 0$  での  $A, B$  の濃度を  $N$  とし、 $C$  の濃度を  $0$  とする。化学反応で  $C$  が  $x$  だけ生成されたとき、 $A, B$  の濃度は  $N - x$  である。

$C$  の生成速度  $dx/dt$  は、 $A$  の濃度  $N - x$  と  $B$  の濃度  $N - x$  の積  $(N - x)^2$  に比例し、その比例定数が反応速度定数  $k$  であるので、時刻  $t$  における  $C$  の濃度  $x(t)$  が満たす微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)^2$$

となる。

(2-1) 上の微分方程式を解くことにより  $x(t)$  を求め、グラフを描け。

(2-2)  $A$  の濃度が最初の半分になる時刻  $t$  を求めよ。

(2-3) 反応速度は段々速くなるか、遅くなるか。

**問題 3** 地上の高い地点から質量  $m$  のボールをそっと放し、ボールを落下させる。  
その際、ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし、その比例定数を  $\gamma$  とする。  
鉛直下向きに  $z$  軸を取り、ボールの初期位置を  $z = 0$  とする。

(3-1) ボールの運動方程式を立てよ。

(3-2) 空気抵抗と重力が釣り合う条件から、時刻無限大  $t \rightarrow \infty$  でのボールの速度  $v_\infty$  を求めよ。

(3-3) 運動方程式を解くことにより、時刻  $t$  における物体の速度  $v(t)$  を求め、グラフを描け。

(3-4) 空気抵抗を小さくする極限  $\gamma \rightarrow 0$  で、ボールの運動は空気抵抗がない場合の自由落下 ( $v(t) = gt$ ) になることを示せ。

ただし、 $x$  が十分小さいとき ( $|x| \ll 1$  のとき)、 $e^x \sim 1 + x$  と近似できることを用いてよい。