基礎力学　期末試験

2018 年 7 月 27 日　　担当：佐藤 純

問題 1 等速円運動する質量 m の物体を考える．円運動の半径を r，角速度を ω とする．

(1-1) 物体の速度の大きさを求めよ．

$\boxed{r\omega}$

(1-2) 物体の加速度の大きさを求めよ．

$\boxed{r\omega^2}$

(1-3) 物体に働く向心力の大きさを求めよ．

$\boxed{mr\omega^2}$

(1-4) 物体の運動量の大きさを求めよ．

$\boxed{mr\omega}$

(1-5) 物体の (円の中心まわりの) 角運動量の大きさを求めよ．

$\boxed{mr^2\omega^2}$

問題 2 地上の高い地点から質量 m のボールをそっと放し，ボールを落下させる．
その際，ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし，その比例定数を γ とする．
鉛直「下向き」に z 軸を取り，ボールの初期位置を $z = 0$ とする．

(2-1) ボールの運動方程式を立てよ．

ボールの速度を $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ として，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v$$

となる．

(2-2) 運動方程式を解くことにより，時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求めよ．

これは変数分離型なので，以下のように解ける．

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v - \frac{mg}{\gamma}} = -\int \frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t,$$

$$\log\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{m}t + A,$$

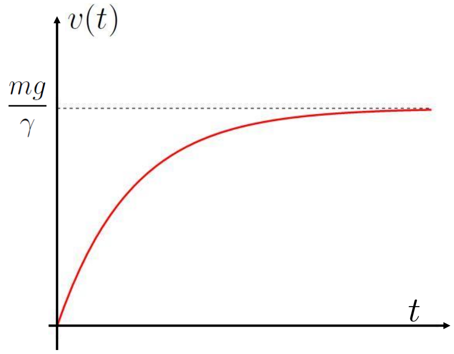
$$v - \frac{mg}{\gamma} = Be^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad (B = e^A)$$

ここで，初期条件 $v(0) = 0$ より，$-\frac{mg}{\gamma} = B$ なので，

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

を得る．

(2-3) 横軸を時刻 t，縦軸を物体の速度 $v(t)$ として，グラフを描け．



$\boxed{\textbf{問題 3}}$ 片端を固定されたバネに付けられた質量 m のおもりの運動方程式は，バネ定数を k として $m\ddot{x} = -kx$ で与えられる．

(3-1) 指数関数型の解 $x(t) = e^{\lambda t}$ を仮定し，λ を決定せよ．

$$\boxed{\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

(3-2) 運動方程式の一般解を求めよ．

$$\boxed{x(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

(3-3) 時刻 $t = 0$ に，バネを a だけ伸ばして $(x = a)$，おもりを静かに放した．
時刻 t におけるおもりの位置 $x(t)$ を求めよ．

$$\boxed{x(t) = a\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

$\boxed{\textbf{問題 4}}$ x 軸上を一次元運動する物体を考える．物体は場所 x で外力 $F(x) = -2x - 4x^3$ を受けるとする．

(4-1) 物体が $x = 1$ から $x = 2$ まで移動したとき，外力がした仕事を求めよ．

外力は $F(x)$ であるから，外力がした仕事は

$$W_{外力} = \int_1^2 F(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (-2x - 4x^3)\mathrm{d}x = \left[-x^2 - x^4\right]_1^2 = \boxed{-18}$$

(4-2) 物体を $x = 1$ から $x = 2$ まで (外力に逆らって人間が) 運ぶのに必要な仕事を求めよ．

外力に逆らって人間が加えた力は $-F(x)$ であるから，人間がした仕事は

$$W_{人間} = \int_1^2 -F(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (2x + 4x^3)\mathrm{d}x = \left[x^2 + x^4\right]_1^2 = \boxed{18}$$

(4-3) $x = 0$ を基準点として，ポテンシャル $U(x)$ を求めよ．

基準点 $x = 0$ から，外力に逆らって $x = a$ まで物体を運んだとき，人間がした仕事は

$$W(0 \to a) = \int_0^a -F(x)\mathrm{d}x = \left[x^2 + x^4\right]_0^a = a^2 + a^4$$

である．してもらった仕事の分だけ，物体はポテンシャルエネルギーを獲得するので，

$U(a) = U(0) + W(0 \to a) = 0 + (a^2 + a^4) = a^2 + a^4$ である．文字を a から x に書き換えて，

$$\boxed{U(x) = x^2 + x^4}$$

問題 5 質量 m_1 の質点 1 が位置 $\vec{r}_1$ に，質量 m_2 の質点 2 が位置 $\vec{r}_2$ にある．質点 1 は質点 2 から力 $\vec{f}$ を受けるとする．作用反作用の法則により，質点 2 は質点 1 から力 $-\vec{f}$ を受ける．外力はないとする．

(5-1) 質点 1, 2 の運動方程式を書け．

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{f}$$

(5-2) 重心の位置 $\vec{R}_{\mathrm{G}}$ を求めよ．

$$\vec{R}_{\mathrm{G}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

(5-3) 重心座標 $\vec{R}_{\mathrm{G}}$ の運動方程式を書け．

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}}_{\mathrm{G}} = 0$$

(5-4) 相対座標 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ の運動方程式を書け．

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}\ddot{\vec{r}} = \vec{f}$$

問題 6 重心を通る固定軸のまわりに一定の角速度 ω で回転する剛体を考える．剛体の重心を原点とし，固定軸を z 軸とする．剛体の z 軸まわりの慣性モーメントを I とする．

(6-1) 剛体の原点まわりの角運動量の z 成分を求めよ．

$$L_z = I\omega$$

(6-2) 剛体の運動エネルギーを求めよ.

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$