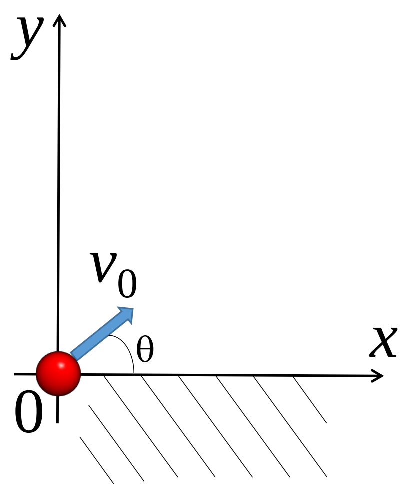
基礎力学演習　期末試験

2018 年 7 月 27 日　　担当：佐藤 純

問題 1 地上から角度 θ で斜めに初速度 v_0 で質量 m の物体を発射する．空気抵抗の影響は無視する．

(1-1) 物体の運動を記述するのに適切な座標軸を設定し，運動方程式を立てよ．

発射地点を原点にとり，水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる．物体は xy 面内を x 軸の正の方向に運動するとする．



物体に働く力ベクトルは，

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

である．時刻 t における物体の位置ベクトルを $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$，速度ベクトルを $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$，加速度ベクトルを $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$，として，運動方程式を立てると，

$$m\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

となる．

(1-2) 運動方程式を解くことにより，発射後の物体の運動を決定せよ．

運動方程式の各成分を一回積分する．まず，

$$v_x(t) = \int a_x(t)\mathrm{d}t = \int 0\,\mathrm{d}t = C$$

となる．$v_x(0) = v_0\cos\theta$ より，$C = v_0\cos\theta$ なので，$v_x(t) = v_0\cos\theta$. y 成分は，

$$v_y(t) = \int a_y(t)\mathrm{d}t = -gt + D$$

となる．$v_y(0)=v_0\sin\theta$ より，$D=v_0\sin\theta$ なので，$v_y(t)=v_0\sin\theta-gt$. 以上により，

$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ v_0\sin\theta-gt \end{pmatrix}$$

を得る．運動方程式の各成分をもう一回積分する．x 成分は，

$$x(t)=\int v_x(t)\mathrm{d}t=v_0t\cos\theta+C$$

となる．$x(0)=0$ より，$C=0$ なので，$x(t)=v_0t\cos\theta$. y 成分は，

$$y(t)=\int v_y(t)\mathrm{d}t=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2+D$$

となる．$y(0)=0$ より，$D=0$ なので，$y(t)=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2$. 以上により，

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} v_0t\cos\theta \\ v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

を得る．

(1-3) 物体の水平到達距離を最大にする発射角度 θ を求めよ．

地上に落下する時刻を $t=T$ とすると，

$$y(T)=v_0T\sin\theta-\frac{1}{2}gT^2=T(2v_0\sin\theta-gT)=0$$

より，地上に落下する時刻は

$$T=2v_0\sin\theta/g$$

である．したがって，水平到達距離は

$$x(T)=v_0(2v_0\sin\theta/g)\cos\theta=v_0^2\sin 2\theta/g$$

である．$\sin 2\theta$ は $2\theta=90^\circ$ で最大となるので，そのときの θ は $\theta=45^\circ$

問題 2 質量 m の物体が力を受けながら xy 面内を運動している．

時刻 t に物体は位置 $\vec{r}=\begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$ にあるとする．

(2-1) 時刻 t における物体の運動量 $\overrightarrow{P}$ を求めよ．

$$\overrightarrow{P}=m\vec{v}=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}=m\omega\begin{pmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2-2) 時刻 t における物体の (原点まわりの) 角運動量 $\overrightarrow{L}$ を求め，保存していることを示せ．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{P} &= \begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times m\omega \begin{pmatrix} -a\sin\omega t \\ b\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (a\cos\omega t)(b\cos\omega t) - (-a\sin\omega t)(b\sin\omega t) \end{pmatrix} \\ &= m\omega ab \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

この式は時間 t を含んでおらず，保存している．

(2-3) 時刻 t において物体に働く力を求め，中心力であることを示せ．

$$\overrightarrow{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{P} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} a\cos\omega t \\ b\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -m\omega^2 \vec{r}$$

より，$-\vec{r}$ の方向を向いており，中心力である．

問題 3 以下の剛体の慣性モーメントを求めよ．

(3-1) 長さ ℓ, 質量 m の棒の，中心を通って棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメント

棒は x 軸の $-\ell/2 \leq x \leq \ell/2$ の部分にあるとし，長さ $\mathrm{d}x$ の小部分に分割すると，

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\ell} m\right) x^2 = \left[\frac{m}{3\ell}x^3\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \boxed{\frac{1}{12}m\ell^2}$$

(3-2) 半径 a, 質量 m の円盤の，中心を通って面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント

まず，半径 a，質量 m の細い円環の慣性モーメントは，

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i a^2 = \left(\sum_i m_i\right) a^2 = ma^2$$

である．

円盤を細い円環に分割してその和をとれば，

$$I = \sum_i I_i = \int_0^a \frac{2\pi r \mathrm{d}r}{\pi a^2} m r^2 = \left[\frac{mr^4}{2a^2}\right]_0^a = \boxed{\frac{1}{2}ma^2}$$

(3-3) 半径 a, 質量 m の円盤の，中心を通って面に平行な軸のまわりの慣性モーメント

円盤は中心を原点とする xy 平面内にあるとし，前問の回転軸を z 軸とする．x, y, z 軸周りの慣性モーメントを I_x, I_y, I_z とする．求める慣性モーメント I は $I = I_x = I_y$ である.（円柱の対称性より $I_x = I_y$）．I_z は前問の結果より $I_z = \frac{1}{2}ma^2$. また，

$$I_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2), \quad I_x = \sum_i m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_i m_i x_i^2,$$

より，$I_z = I_x + I_y = 2I_x$ なので，$I_x = \frac{1}{2}I_z = \boxed{\frac{1}{4}ma^2}$

(3-4) 半径 a, 高さ ℓ, 質量 m の直円柱の，中心を通る軸のまわりの慣性モーメント

円柱の長さを ℓ とする．円柱を薄い円盤に分割してその和をとれば，

$$I = \sum_i I_i = \int_0^\ell \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\ell}m\right)a^2 = \boxed{\frac{1}{2}ma^2}$$

問題 4 バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け，他端を固定する．おもりが机の上を動く際に，速度に比例した摩擦力が働くとし，比例定数を γ とする．

(4-1) おもりの運動を記述するのに適切な座標軸を設定し，運動方程式を立てよ．

バネと平行に x 軸を設定し，バネが自然長（伸びも縮みもないときの長さ）のときのおもりの位置を $x = 0$ とする．バネがおもりに及ぼす力は $-kx$，おもりに働く摩擦力は $-\gamma v$ と書けるので，運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}}$$

となる．

(4-2) おもりにつり合いの位置で初速度 v_0 を与えた時，その後のおもりの運動を決定せよ．ただし，摩擦は十分に小さいとする．

$x(t) = e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると，

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t} - \gamma\lambda e^{\lambda t},$$

$$\boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0}$$

と，λ に対する二次方程式が得られる．この 2 次方程式を解くと，

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

となる．摩擦が小さいとき $(\gamma < \sqrt{4mk})$，ルートの中身 $\gamma^2 - 4mk$ は負となり，λ は複素数となる．すなわち，

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m} \\ &= -\frac{\gamma}{2m} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\end{aligned}$$

となるので，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}$ とおくと，$\lambda = -\frac{\gamma}{2m} \pm \mathrm{i}\omega$ となり，一般解は

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{(-\frac{\gamma}{2m}+\mathrm{i}\omega)t} + Be^{(-\frac{\gamma}{2m}-\mathrm{i}\omega)t} \\
&= Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t+\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\frac{\gamma}{2m}t-\mathrm{i}\omega t} \\
&= Ae^{-\frac{\gamma}{2m}t}e^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\frac{\gamma}{2m}t}e^{-\mathrm{i}\omega t} \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t}) \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\{A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)\} \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\{(A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t\} \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(C\cos\omega t + D\sin\omega t)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$C = A + B,\ D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

初期条件 $x(0) = 0,\ v(0) = v_0$ から，積分定数 C と D を決定する．
まず，$x(0) = 0$ より，$x(0) = C = 0$ を得る．したがって，

$$x(t) = De^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\omega t$$

を得る．これを微分して，

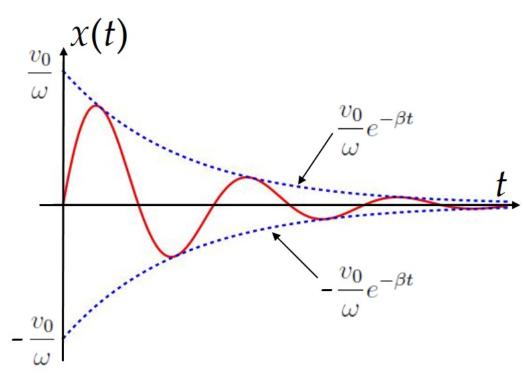
$$\begin{aligned}
v(t) = x'(t) &= D\{(e^{-\frac{\gamma}{2m}t})'\sin\omega t + e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(\sin\omega t)'\} \\
&= De^{-\frac{\gamma}{2m}t}(\omega\cos\omega t - \frac{\gamma}{2m}\sin\omega t)
\end{aligned}$$

より，$v_0 = v(0) = D\omega$ なので，$D = \frac{v_0}{\omega}$ を得る．
したがって，

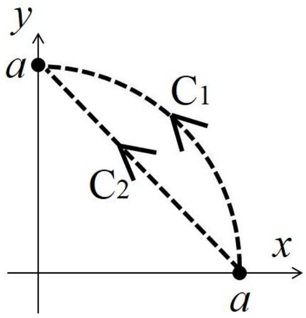
$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\omega t}$$

となる．

(4-3) 横軸を時刻，縦軸をおもりの位置にとって，グラフを描け．



問題 5 xy 平面内に物体があり，場所 (x, y) において物体は力 $\vec{F}(x, y) = -k\begin{pmatrix} y \\ x + a \end{pmatrix}$ を受けるとする．



(5-1) 右図中の経路 C_1 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 W_1 を求めよ．ただし，C_1 は半径 a の円弧を表すとする．

$$\boxed{C_1}\quad \vec{r}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix},\quad \theta:0\to\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{d}\vec{r}=a\mathrm{d}\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$-\overrightarrow{F}=k\begin{pmatrix}y\\ x+a\end{pmatrix}=ka\begin{pmatrix}\sin\theta\\ 1+\cos\theta\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=ka^2\mathrm{d}\theta(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)=ka^2(\cos\theta+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$W_1=\int_{C_1}-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=ka^2\left[\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{ka^2}$$

(5-2) 右図中の直線経路 C_2 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 W_2 を求めよ．

$$\boxed{C_2}\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}+s\left\{\begin{pmatrix}0\\ a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}\right\}=a\begin{pmatrix}1-s\\ s\end{pmatrix},\quad s:0\to 1,\quad \mathrm{d}\vec{r}=a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$-\overrightarrow{F}=k\begin{pmatrix}y\\ x+a\end{pmatrix}=ka\begin{pmatrix}s\\ 2-s\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=ka\begin{pmatrix}s\\ 2-s\end{pmatrix}\cdot a\mathrm{d}s\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=2ka^2(1-s)\mathrm{d}s,$$

$$W_2=\int_{C_2}-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=2ka^2\int_0^1(1-s)\mathrm{d}s=ka^2\left[2s-s^2\right]_0^1=\boxed{ka^2}$$

(5-3) 原点を基準点として，ポテンシャル $U(x,y)$ を求めよ．(ポテンシャルが存在することは仮定してよい)

基準点 $(0,0)$ から場所 (x,y) まで運ぶのに必要な仕事 W を求めれば，それがポテンシャル $U(x,y)$ となる．この場合力 $\overrightarrow{F}(x,y)$ は保存力なので（証明なしに用いてよい），仕事は始点と終点だけで決まり，経路によらない．そこで，一番計算しやすい経路として，始点 $(0,0)$ と終点 (x,y) を結ぶ直線経路 $\mathcal{C}$ を選ぶことにする．

$$\boxed{\mathcal{C}}\quad \vec{r}=s\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad s:0\to 1,\quad \mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}s\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$-\overrightarrow{F}=k\begin{pmatrix}sy\\ sx+a\end{pmatrix},$$

$$-\overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=k\{sxy+y(sx+a)\}\mathrm{d}s=ky(2sx+a)\mathrm{d}s,$$

$$W_2 = \int_{\mathcal{C}} -\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = ky \int_0^1 (2sx + a)\mathrm{d}s = ky \left[xs^2 + as\right]_0^1 = ky(x + a)$$

$$\boxed{U(x, y) = k(x + a)y}$$