

基礎力学演習 第8回 仕事とエネルギー保存則 (3次元)

2018年6月15日 担当：佐藤 純

問題1 地面に水平に x 軸，鉛直方向上向きに y 軸をとる．質量 m の物体を A 地点 $(a, 0)$ から B 地点 $(0, b)$ まで運ぶのに必要な仕事を求めよう (下の左図参照)．物体には重力 $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ が働いているので，物体を支えるためには $-\vec{F}$ の力が必要である．したがって，物体を $d\vec{r}$ だけ微小に動かすのに必要な仕事は $-\vec{F} \cdot d\vec{r}$ である．これを経路 C に沿って足し合わせれば，物体を経路 C に沿って運ぶのに必要な仕事 $W(C)$ が

$$W(C) = \int_C -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

と求まることになる．

- (1-1) 下の左図の2つの経路 C_1, C_2 に沿って物体を A から B まで運ぶのに必要な仕事 $W(C_1), W(C_2)$ を計算せよ．
- (1-2) 前問で求めた仕事は経路によらず，ポテンシャルエネルギーの増加分に等しいことを確認せよ．
- (1-3) 物体に働く力 \vec{F} はポテンシャルの微分で

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

と書けることを確認せよ．

問題2 場所 (x, y) において物体に働く力 $\vec{F}(x, y)$ が以下のように与えられているとき，下の右図中の経路 C_1, C_2, C_3 に沿って物体を運ぶのに必要な仕事 $W(C_1), W(C_2), W(C_3)$ を求めよ．ただし， C_2 は半径 a の円弧を表すとする．

(2-1) $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -ky \\ -kx \end{pmatrix}$

(2-2) $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -ky \\ kx \end{pmatrix}$

(2-3) $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{fx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ fy \\ -\frac{fy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

問題3 原点を基準点として，上記問題 (2-1), (2-3) のポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ．

