

基礎力学演習 第3回 抵抗中の運動

2018年5月11日 担当：佐藤 純

問題 1 以下の微分方程式を初期条件 $(x, y) = (0, 1)$ のもとで解け。
また、得られた解を微分することにより、元の微分方程式を満たすことを確かめよ。

(1-1) $y' = 3y$

(1-2) $y' = x(2 - y)$

問題 2 反応速度定数 k の化学反応



を考える。初期時刻 $t = 0$ での A, B の濃度を N とし、 C の濃度を 0 とする。化学反応で C が x だけ生成されたとき、 A, B の濃度は $N - x$ である。

C の生成速度 dx/dt は、 A の濃度 $N - x$ と B の濃度 $N - x$ の積 $(N - x)^2$ に比例し、その比例定数が反応速度定数 k であるので、時刻 t における C の濃度 $x(t)$ が満たす微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)^2$$

となる。

(2-1) 上の微分方程式を解くことにより $x(t)$ を求め、グラフを描け。

(2-2) A の濃度が最初の半分になる時刻 t を求めよ。

(2-3) 反応速度は段々速くなるか、遅くなるか。

問題 3 地上の高い地点から質量 m のボールをそっと放し、ボールを落下させる。
その際、ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし、その比例定数を γ とする。
鉛直下向きに z 軸を取り、ボールの初期位置を $z = 0$ とする。

(3-1) ボールの運動方程式を立てよ。

(3-2) 空気抵抗と重力が釣り合う条件から、時刻無限大 $t \rightarrow \infty$ でのボールの速度 v_∞ を求めよ。

(3-3) 運動方程式を解くことにより、時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求め、グラフを描け。

(3-4) 空気抵抗を小さくする極限 $\gamma \rightarrow 0$ で、ボールの運動は空気抵抗がない場合の自由落下 ($v(t) = gt$) になることを示せ。

ただし、 x が十分小さいとき ($|x| \ll 1$ のとき)、 $e^x \sim 1 + x$ と近似できることを用いてよい。