

基礎力学演習 第1回 運動のベクトル表示

2018年4月20日 担当：佐藤 純

問題1 xy -平面内を原点 $(0, 0)$ を中心に左回りに等速円運動する物体を考える。
円運動の半径を r , 角速度を ω とする。

- (1-1) 初期時刻 $t = 0$ において物体は $(x, y) = (r, 0)$ にあるとする。
時刻 t における物体の位置ベクトル $\vec{r}(t)$, 速度ベクトル $\vec{v}(t)$, 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ を求めよ。
- (1-2) 位置ベクトルと速度ベクトルは常に直交していることを示せ。
- (1-3) 加速度ベクトルは, 常に「物体から原点に向かう向き」にあることを示せ。
- (1-4) 速度ベクトルの大きさ $v = |\vec{v}|$ と加速度ベクトルの大きさ $a = |\vec{a}|$ を, r, ω を用いて表せ。

問題2 xy -平面内における物体の運動を, 極座標で記述することを考える。
時刻 t における物体の位置の xy -座標を (x, y) , 極座標を (r, θ) とする。

- (2-1) (x, y) を (r, θ) の式で表せ。
- (2-2) $\left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}\right)$ 方向の単位ベクトル \vec{e}_r , $\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}\right)$ 方向の単位ベクトル \vec{e}_θ を求めよ。
- (2-3) 前問で求めた $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ を極座標における (物体とともに動く) 基本ベクトルと定める。
それに対し, xy -座標における (動かない) 基本ベクトルを $\vec{e}_x = (1, 0), \vec{e}_y = (0, 1)$ とする。
 \vec{e}_x, \vec{e}_y を原点を始点として, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ を物体の位置を始点として図示せよ。
- (2-4) 時刻 t における物体の位置ベクトル

$$\vec{r} = (x, y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

は, 極座標を用いると

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

と書けることを示せ。

- (2-5) 時刻 t における物体の速度ベクトル

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

は, 極座標を用いると

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ。

- (2-6) 同様に, 物体の加速度ベクトル

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$

は, 極座標を用いると

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ。

- (2-7) 角速度 ω の等速円運動の場合に, 具体的に $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ の極座標表示を計算し, 問題 (1-2)~(1-4) の事実を確認せよ。