物理学演習II　第14回　3次元の閉じ込め，期待値，不確定性関係

2018年1月19日　　担当：佐藤 純

問題1 3辺の長さが a, b, c の直方体に閉じ込められた質量 m の粒子を考える (下図参照). すなわち，箱の中では $V = 0$, 外では $V = \infty$ のポテンシャル V 中を運動する質量 m の粒子を考える.

(1-1) 箱の内部において，この粒子の波動関数 $\psi(x, y, z)$ が満たすべき Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

である. 波動関数を

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

と変数分離したとき，$X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ が満たす微分方程式を求めよ.

(1-2) 一次元閉じ込め $(0 < x < a)$ の場合の Schrödinger 方程式

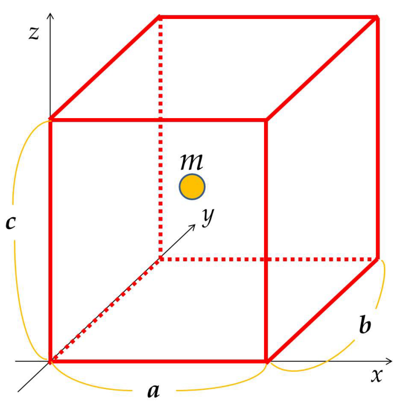
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x)$$

の解

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x, \qquad E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を用いて，3次元閉じ込めの場合の波動関数 $\psi(x, y, z)$ およびエネルギー E を決定せよ.

(1-3) $b = c = 2a$ の場合に，基底状態エネルギー，第1, 2, 3励起エネルギーを求め，それぞれの縮退度を述べよ.



問題2 1次元の領域 $0 < x < a$ に閉じ込められた質量 m の粒子の波動関数は

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で表される.

(2-1) 位置 $\hat{x}$ と運動量 $\hat{p}_x$ の期待値 $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}_x\rangle$ を求めよ.

(2-2) 位置 $\hat{x}$ と運動量 $\hat{p}_x$ の2乗の期待値 $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}_x^2\rangle$ を求めよ.

(2-3) 位置の不確かさ Δx と運動量の不確かさ Δp_x が

$$\Delta x = \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2}, \qquad \Delta p_x = \sqrt{\langle\hat{p}_x^2\rangle - \langle\hat{p}_x\rangle^2}$$

で求まるとき，

$$\Delta x \cdot \Delta p_x > \hbar/2$$

となることを示せ.