

物理学演習II 第12回 一次元の閉じ込め運動

2017年12月15日 担当：佐藤 純

問題1 [正準交換関係]

位置 x と運動量 p を表す演算子 \hat{x}, \hat{p} を

$$\hat{p}f(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}f(x) = -i\hbar f'(x), \quad \hat{x}f(x) = xf(x)$$

で定義する。

(1-1) $\hat{x}\hat{p}f(x)$ を計算せよ。

(1-2) $\hat{p}\hat{x}f(x)$ を計算せよ。

(1-3) これらの結果から、位置と運動量の交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$ を計算せよ。

問題2 [一次元運動]

ポテンシャル $V(x)$ の中で x 軸上を運動する質量 m の粒子を考える。この粒子の定常状態における波動関数 $\psi(x)$ は Schrödinger 方程式

$$\mathcal{H}\psi(x) = E\psi(x), \quad \mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

を満たす。

(2-1) ポテンシャルがないとき ($V(x) = 0$)、波動関数 $\psi(x) = A \exp\left(i\frac{p}{\hbar}x\right)$ は Schrödinger 方程式を満たすことを示し、エネルギー E を求めよ。

(2-2) 調和振動子ポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ のとき、波動関数 $\psi(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ は Schrödinger 方程式を満たすことを示し、エネルギー E を求めよ。(下図左参照)

問題3 [一次元の閉じ込め運動]

ポテンシャル $V(x < 0) = V(a < x) = \infty, V(0 < x < a) = 0$ によって $0 < x < a$ の領域に閉じ込められた質量 m の粒子を考える。(下図右参照)

(3-1) 領域 $0 < x < a$ における Schrödinger 方程式 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x)$ の一般解を求めよ。

(3-2) 接続条件 $\psi(0) = \psi(a) = 0$ から、エネルギー E が量子化されることを示せ。

(3-3) 確率の規格化条件 $\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 1$ から、波動関数を決定せよ。

