物理学演習II　第10回　Schrödinger方程式

2017年12月8日　　担当：佐藤 純

問題1 [波を表す式]

(1-1) $y = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$ のグラフを描け.

(1-2) $y = x^2$ と $y = (x-3)^2$ のグラフを重ねて描き，これら2つのグラフの関係を述べよ.

(1-3) 時刻 $t = 0$ の波形が $y = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$ で表される波が，速度 c で x 軸の正方向に進んでいるとき，時刻 t における波形を表す式を書け.

(1-4) 波の波長 λ，速度 c，振動数 ν の間に成り立つ関係式を求めよ.

(1-5) 波の波数 k と，角振動数 ω を，

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu$$

で定義する．これを使って **(1-3)** で求めた波の式を書き直せ.

(1-6) $f(x) = e^{\mathrm{i}x}$ とするとき，$f'(x)$ を求めよ.

(1-7) $f(x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ の微分 $f'(x)$ を計算し，$f'(x) = \mathrm{i}f(x)$ が成り立っていることを示せ.

問題2 [**Schrödinger方程式**]

(2-1) 波動関数を

$$\psi(x,t) = Ae^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$$

とする．偏微分 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ を計算せよ.

(2-2) 粒子性と波動性をつなぐ式 $E = h\nu,\ p = \dfrac{h}{\lambda}$ を使って，

$$E = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

を示せ.

(2-3) 質量 m の粒子が運動量 p で運動しているとき，その運動エネルギーを求めよ.

(2-4) 質量 m の粒子がポテンシャル $V(x)$ の中を運動量 p で運動しているとき，粒子の全エネルギーは $E = \dfrac{p^2}{2m} + V(x)$ と書けることから，Schrödinger方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t)$$

を導け.（これを，時間を含むSchrödinger方程式という）

(2-5) 波動関数 $\psi(x,t)$ が，t だけに依存する部分 $f(t)$ と x だけに依存する部分 $\varphi(x)$ に

$$\psi(x,t) = f(t)\varphi(x)$$

と分離できるとする．このとき，E を定数として，$\varphi(x)$ は微分方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

を満たすことを示せ.（これを，時間を含まないSchrödinger方程式という）