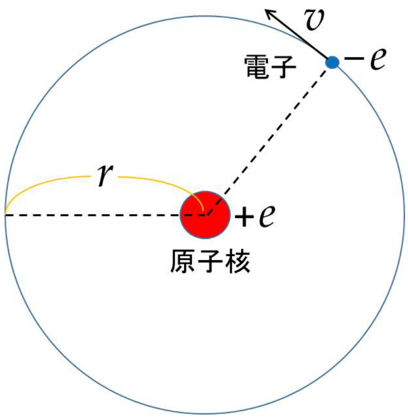
物理学演習 II　第 9 回　前期量子論

2017 年 12 月 1 日　担当：佐藤 純

問題 1 [ボーアの原子模型]

質量 m，電荷 $-e$ の電子が，電荷 $+e$ の原子核の周りを半径 r，速度 v で等速円運動しているとする．



(1-1) この電子の運動量の大きさ p を求めよ．

$\boxed{p = mv}$

(1-2) この電子の角運動量の大きさ L を求めよ．

$\boxed{L = rp = mrv}$

(1-3) 運動量 p の粒子の物質波の波長 λ が

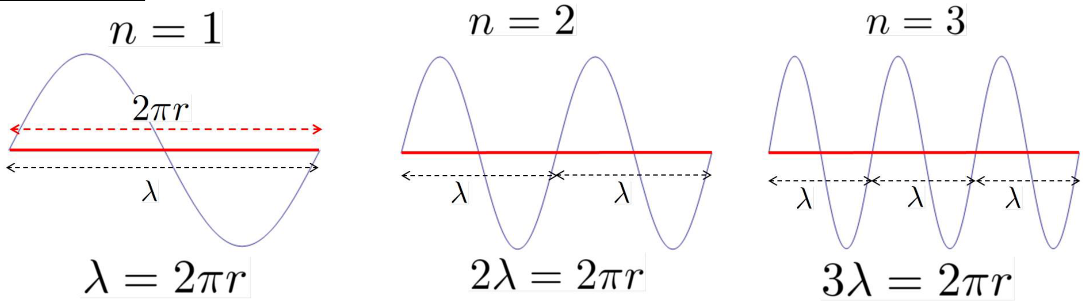
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

で与えられるというド・ブロイの関係式から，プランク定数 h は角運動量の次元を持つことを示せ．

$h = p\lambda$ より，h は運動量×距離なので，角運動量の次元を持っている．

(1-4) 電子の軌道円周長が物質波の波長 λ の整数倍になるというボーアの量子化条件を式で表せ．

$\boxed{2\pi r = n\lambda}$



(1-5) そのとき，電子の角運動量 L がディラック定数 $\hbar$ の整数倍に量子化されることを示せ．

$\lambda = \dfrac{h}{p}$ を $2\pi r = n\lambda$ に代入すると $2\pi r = \dfrac{nh}{p}$ なので，$\boxed{L =} rp = \dfrac{nh}{2\pi} = \boxed{n\hbar}$ を得る．
ただし，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ である．

(1-6) 電子の円運動の遠心力と，原子核から受ける静電気力のつり合いの式を書け．

$$\boxed{m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

(1-7) このつり合いの式と，ボーアの量子化条件から，電子の円運動の半径 r と速度 v を求めよ．

$L = n\hbar = \dfrac{nh}{2\pi}$ であり，$L = rp = mrv$ なので，$mrv = \dfrac{nh}{2\pi}$ である．
前問で求めた釣り合いの式の両辺に mr^3 をかけると，

$$(mrv)^2 = \frac{mre^2}{4\pi\epsilon_0}$$

となるが，これに $mrv = \dfrac{nh}{2\pi}$ を代入して

$$\frac{n^2h^2}{(2\pi)^2} = \frac{mre^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2h^2}{2\pi} = \frac{mre^2}{2\epsilon_0}$$

を得る．これを r について解くと，

$$\boxed{r = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi me^2}n^2}$$

となる．これを $v = \dfrac{nh}{2\pi mr}$ に代入すれば速度 v が

$$\boxed{v = \frac{e^2}{2h\epsilon_0 n}}$$

と求まる．

(1-8) 電子の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}mv^2$, 静電エネルギーは $-\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ であることから，電子の全エネルギー E を求めよ．

釣り合いの式の両辺に r をかけると，

$$mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

となるが，これを $E = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ を代入して

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2 = \boxed{-\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2}\frac{1}{n^2}}$$

(1-9) アインシュタインの光量子論によると，振動数 ν の光子のエネルギーは $h\nu$ と書ける．今，電子が状態 n_1 から n_2 に遷移して $(n_1 > n_2)$，波長 λ の光を放出したとすると，リュードベリの公式は

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

と書ける．リュードベリ定数 R を求めよ．

光の波長 λ と振動数 ν は関係式 $c = \lambda\nu$ を満たすので，光子のエネルギーは

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

と書ける．ただし，c は光速度である．

電子が状態 n_1 から n_2 に遷移して波長 λ の光を放出したとすると

$$h\frac{c}{\lambda} = E_{n_1} - E_{n_2}$$

なので

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8h^3c\epsilon_0^2}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

となる．したがって，リュードベリ定数は

$$\boxed{R = \frac{me^4}{8h^3c\epsilon_0^2}}$$

となる．