物理学演習 II　第 7 回　ローレンツ力

2017 年 11 月 17 日　担当：佐藤 純

問題 1 [ローレンツ力]

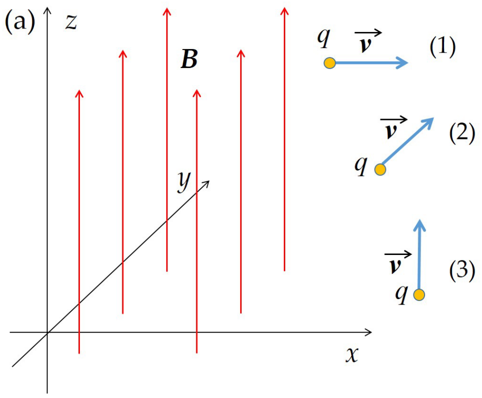
下図 (a) のように，z 軸方向の一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ の中を電荷 q が速度 $\vec{v}$ で運動しているとき，電荷が受ける力 $\vec{F}$ を求め，図中に描きこめ．

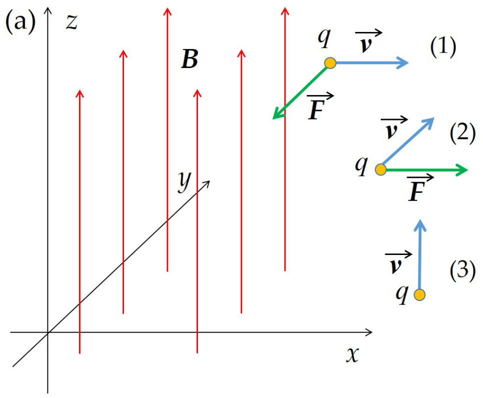
$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$ より，

(1-1) $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$　　$\boxed{\vec{F} = (0, -qv_xB_z, 0)}$

(1-2) $\vec{v} = (0, v_y, 0)$　　$\boxed{\vec{F} = (qv_yB_z, 0, 0)}$

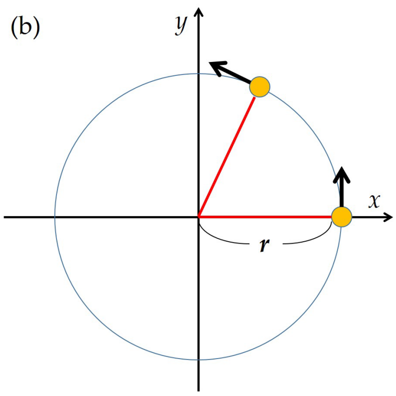
(1-3) $\vec{v} = (0, 0, v_z)$　　$\boxed{\vec{F} = (0, 0, 0)}$





問題 2 [古典粒子の円運動]

長さ r のロープがあり，片端が原点に固定され，もう片端には質量 m のオモリがつながれている．オモリはロープに引っ張られつつ，原点を中心に xy 面内を反時計回りに角速度 ω で回転している．(下図 (b) 参照．) 時刻 $t = 0$ においてオモリは $(x, y) = (r, 0)$ にあるとする．



(2-1) 時刻 t におけるオモリの位置 $\vec{r}(t)$ を求めよ．

> 角速度 ω なので，オモリは 1 秒間に角度 ω だけ回るので，t 秒間に角度 ωt だけ回る．
> $\boxed{\vec{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)}$

(2-2) 時刻 t におけるオモリの速度 $\vec{v}(t)$ およびその大きさ $v=|\vec{v}(t)|$ を求めよ．

> 速度ベクトルは位置ベクトルを時間で微分すれば求まる．
> $\vec{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\omega t, r\sin\omega t)=(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)=\boxed{r\omega(-\sin\omega t,\cos\omega t)}$
> $v=|\vec{v}(t)|=r\omega|(-\sin\omega t,\cos\omega t)|=\boxed{r\omega}$

(2-3) 時刻 t におけるオモリの加速度 $\vec{a}(t)$ およびその大きさ $a=|\vec{a}(t)|$ を求めよ．

> 加速度ベクトルは速度ベクトルを時間で微分すれば求まる．
> $\vec{a}(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t)=r\omega\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\sin\omega t,\cos\omega t)=r\omega(-\omega\cos\omega t,-\omega\sin\omega t)=\boxed{-r\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t)}$
> $a=|\vec{a}(t)|=r\omega^2|(\cos\omega t,\sin\omega t)|=\boxed{r\omega^2}$

(2-4) ロープがオモリを引っ張る力の大きさ f は

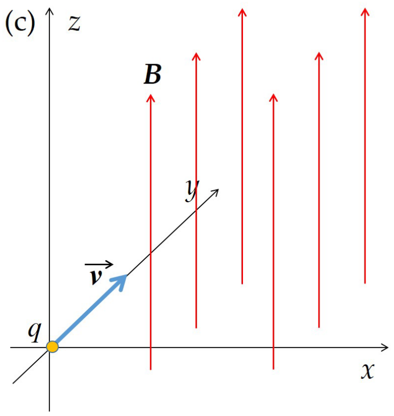
$$\boxed{f=m\frac{v^2}{r}}$$

と書けることを示せ．

> 運動方程式より，$f=ma=mr\omega^2$ であるが，$v=r\omega$ より $\omega=\dfrac{v}{r}$ なのでこれを代入して $f=mr\left(\dfrac{v}{r}\right)^2=m\dfrac{v^2}{r}$ を得る．

問題 3 ［サイクロトロン運動］

z 軸方向の一様な磁束密度 $\overrightarrow{B}=(0,0,B_z)$ の中で，電荷 q の荷電粒子を原点から初速度 $\vec{v}(0)=(0,v_0,0)$ で打ち出す．(下図 (c) 参照)



(3-1) 荷電粒子の運動方程式を書け．

> $m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}=q\vec{v}\times\overrightarrow{B}=q(v_yB_z,-v_xB_z,0)$ より，
>
> $$\boxed{\begin{cases} mv_x'=qv_yB_z \\ mv_y'=-qv_xB_z \\ mv_z'=0 \end{cases}}$$

(3-2) 運動方程式を一回積分し，時刻 t での速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ．

$v_x' = \frac{qB_z}{m}v_y$ の両辺を時間 t で微分して，

$$v_x'' = \frac{qB_z}{m}v_y' = \frac{qB_z}{m}\left(-\frac{qB_z}{m}v_x\right) = -\frac{q^2B_z^2}{m^2}v_x$$

より，$v_x(t) = C_1\cos\frac{qB_z}{m}t + C_2\sin\frac{qB_z}{m}t$.

$v_x' = \frac{qB_z}{m}v_y$ より，$v_y = \frac{m}{qB_z}v_x'$ なので，

$$\begin{aligned} v_y(t) &= \frac{m}{qB_z}\left(-\frac{qB_z}{m}C_1\sin\frac{qB_z}{m}t + \frac{qB_z}{m}C_2\cos\frac{qB_z}{m}t\right) \\ &= -C_1\sin\frac{qB_z}{m}t + C_2\cos\frac{qB_z}{m}t \end{aligned}$$

$v_z'(t) = 0$ より，$v_z(t) = C_3$．以上より，C_1, C_2, C_3 を積分定数として，

$$\vec{v}(t) = \left(C_1\cos\frac{qB_z}{m}t + C_2\sin\frac{qB_z}{m}t, -C_1\sin\frac{qB_z}{m}t + C_2\cos\frac{qB_z}{m}t, C_3\right)$$

初期条件 $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)$ より，$C_1 = 0$, $C_2 = v_0$, $C_3 = 0$ なので，

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left(v_0\sin\frac{qB_z}{m}t, v_0\cos\frac{qB_z}{m}t, 0\right)}$$

(3-3) 運動方程式をもう一回積分し，時刻 t での位置 $\vec{r}(t)$ を求めよ．

$$\vec{r}(t) = \left(-v_0\frac{m}{qB_z}\cos\frac{qB_z}{m}t + C_4, v_0\frac{m}{qB_z}\sin\frac{qB_z}{m}t + C_5, C_6\right)$$

初期条件 $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ より，$C_4 = \frac{mv_0}{qB_z}$, $C_5 = C_6 = 0$ なので，

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(\frac{mv_0}{qB_z}\left(1 - \cos\frac{qB_z}{m}t\right), \frac{mv_0}{qB_z}\sin\frac{qB_z}{m}t, 0\right)}$$

(3-4) 荷電粒子の運動が等速円運動であることを示し，円運動の中心と半径，および角速度と周期を求めよ．

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{mv_0}{qB_z}, 0, 0\right) + \frac{mv_0}{qB_z}\left(\cos\left(\pi - \frac{qB_z}{m}t\right), \sin\left(\pi - \frac{qB_z}{m}t\right), 0\right)$$

より，中心 $\boxed{\left(\frac{mv_0}{qB_z}, 0, 0\right)}$ 半径 $\boxed{\frac{mv_0}{qB_z}}$ 角速度 $\boxed{\omega = \frac{qB_z}{m}}$ の円運動をする．

周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{\frac{2\pi m}{qB_z}}$ となる．