# 物理学演習 II　第 3 回　ポテンシャルと電位

2017 年 10 月 11 日　　担当：佐藤 純

**問題 1** $x$ 軸原点に電荷 $q$ がある．この電荷が周囲に作る電場と電位を，テスト電荷 $q_t$ を使って調べる．

**(1-1)** テスト電荷 $q_t$ を位置 $x(>0)$ においたとき，テスト電荷が原点の電荷 $q$ から受ける力 $F(x)$ を求めよ．

$$\boxed{F(x) = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0 x^2}}$$

**(1-2)** 前問で求めた力をテスト電荷 $q_t$ で割ったもの $E(x) = F(x)/q_t$ を "電場" と呼ぶ．原点の電荷 $q$ が位置 $x$ に作る電場 $E(x)$ を求めよ．

$$\boxed{E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}}$$

**(1-3)** テスト電荷 $q_t$ を，$x = a$ から $x = b$ まで運ぶのに必要な仕事 $W(a \to b)$ を求めよ．ただし，$0 < b < a$ とする．

クーロン力 $F(x)$ に逆らって手で押す力は $-F(x)$ なので，これを $x = a$ から $x = b$ まで積分して，

$$\begin{aligned} W(a \to b) &= \int_a^b \{-F(x)\} \mathrm{d}x = \int_a^b \left\{-\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0 x^2}\right\} \mathrm{d}x = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x}\right]_a^b = \boxed{\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} \end{aligned}$$

**(1-4)** このとき，テスト電荷は仕事 $W$ をされることによって，ポテンシャルエネルギーを蓄える．位置 $x$ におけるポテンシャルエネルギーを $U(x)$ とするとき，$U(b) - U(a)$ を求めよ．

$$U(b) - U(a) = W(a \to b) = \boxed{\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

**(1-5)** ポテンシャルの基準点を $x = a$ に選ぶ．すなわち，$U(a) = 0$ とする．

このとき，位置 $x$ におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ．

上の式で $b \to x$ と文字を取り替えると

$$U(x) = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) + U(a) = \boxed{\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$$

**(1-6)** ポテンシャルの基準点を無限遠点 $x=\infty$ に選んだときの，位置 $x$ におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ．

$\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}=0$ より，

$$U(x)=\boxed{\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0 x}}$$

**(1-7)** 前問で求めたポテンシャルエネルギーを，テスト電荷 $q_t$ で割ったもの $\phi(x)=U(x)/q_t$ を "電位" と呼ぶ．原点の電荷 $q$ が位置 $x$ に作る電位 $\phi(x)$ を求めよ．

$$\boxed{\phi(x)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}}$$

**(1-8)** 位置 $x$ における電場 $E(x)$ は，電位 $\phi(x)$ を微分することによって

$$E(x)=-\phi'(x)$$

と書けることを確認せよ．

$$-\phi'(x)=-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}=E(x)$$

**(1-9)** 同様にして，3 次元の場合には，$\vec{r}$ の位置における電位 $\phi(\vec{r})$ は

$$\phi(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

と書ける．ただし，$r=|\vec{r}|$ は原点からの距離を表す．

$\vec{r}$ の位置における電場 $\overrightarrow{E}(\vec{r})$ は

$$\overrightarrow{E}(\vec{r})=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

と書けることを示せ．

$\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2 + y^2 + z^2)' \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x \\
&= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} \\
&= -\frac{x}{r^3}
\end{aligned}$$

同様に，

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}.$$

以上より，

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}(x, y, z) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} = \overrightarrow{E}.
\end{aligned}$$