物理学演習II　第2回　電場

2017年10月6日　　担当：佐藤 純

問題 1 3次元 xyz 空間の原点に電荷 q がある．

(1-1) $\vec{r}$ の位置に電荷 q_1 があるとき，この電荷に働く力 $\overrightarrow{F}_1$ を求めよ．($r = |\vec{r}|$ とせよ)

$$\overrightarrow{F}_1 = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{r^3}\vec{r}}$$

(1-2) 原点の電荷 q が $\vec{r}$ の位置に電場

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

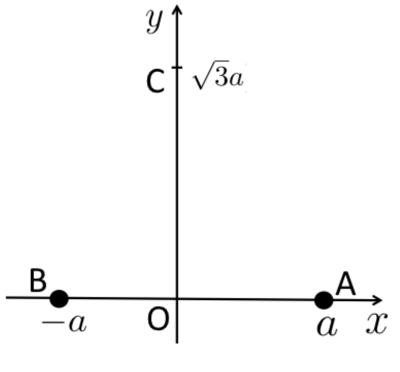
を発生していると考える．上で求めた力 $\overrightarrow{F}_1$ を電場 $\overrightarrow{E}$ を使って表せ．

$$\overrightarrow{F}_1 = \boxed{q_1\overrightarrow{E}}$$

(1-3) $\vec{r}$ の位置に電荷 q_2 があるとき，この電荷に働く力 $\overrightarrow{F}_2$ を電場 $\overrightarrow{E}$ を使って表せ．

$$\overrightarrow{F}_2 = \boxed{q_2\overrightarrow{E}}$$

問題 2 図のように x 軸上の原点Oから a [m] の距離にある点Aと点Bに q [C] の正電荷を固定した．真空の誘電率を ϵ_0 として次の問に答えよ．



(2-1) 点A にある点電荷が，点C の位置に作る電場を求めよ．

A にある電荷が C に作る電場 $\overrightarrow{E}_{A\to C}$ なので，$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-a, \sqrt{3}a) = a(-1, \sqrt{3})$, $r = a\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2a$ より，

$$\overrightarrow{E}_{A\to C} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a(-1,\sqrt{3})}{(2a)^3} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1,\sqrt{3})}{8a^2}}$$

(2-2) 点 B にある点電荷が，点 C の位置に作る電場を求めよ．

B にある電荷が C に作る電場 $\overrightarrow{E}_{B\to C}$ なので，$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (a, \sqrt{3}a) = a(1, \sqrt{3})$, $r = a\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2a$ より，

$$\overrightarrow{E}_{B\to C} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a(1,\sqrt{3})}{(2a)^3} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1,\sqrt{3})}{8a^2}}$$

(2-3) 点 C の電場を求めよ．

上で求めた 2 つの電場を合わせて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}_{(A,B)\to C} = \overrightarrow{E}_{A\to C} + \overrightarrow{E}_{B\to C} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1,\sqrt{3})}{8a^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1,\sqrt{3})}{8a^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1,\sqrt{3})+(1,\sqrt{3})}{8a^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(0,2\sqrt{3})}{8a^2} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(0,\sqrt{3})}{4a^2}}\end{aligned}$$

(2-4) 次に，点 D $(0, -\sqrt{3}a)$ の位置に，電荷 Q [C] の点電荷を固定したところ，点 C での電場が 0 になった．Q を求めよ．

D にある電荷 Q が C に作る電場 $\overrightarrow{E}_{D\to C}$ をまず計算する．$\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} = (0, 2\sqrt{3}a) = 2\sqrt{3}a(0,1)$, $r = 2\sqrt{3}a$ より，

$$\overrightarrow{E}_{D\to C} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\sqrt{3}a(0,1)}{(2\sqrt{3}a)^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(0,1)}{(2\sqrt{3}a)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(0,1)}{12a^2}$$

となる．したがって，全電場は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}_{(A,B,D)\to C} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(0,\sqrt{3})}{4a^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(0,1)}{12a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sqrt{3}q}{4a^2}(0,1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{12a^2}(0,1) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\sqrt{3}q}{4a^2} + \frac{Q}{12a^2}\right)(0,1)\end{aligned}$$

となるが，これが釣り合ってゼロになるためには，$\frac{\sqrt{3}q}{4a^2} + \frac{Q}{12a^2} = 0$ より，$\boxed{Q = -3\sqrt{3}q}$

問題 3 以下の仕事量 W を求めよ．

(3-1) 物体を F の力で押して，距離 ℓ だけ動かすのに必要な仕事 W．

$$W = \boxed{F\ell}$$

(3-2) 地上にある質量 m の物体を，高さ h の地点まで持ち上げるのに必要な仕事 W．

$$W = \boxed{mgh}$$

(3-3) バネ定数 k のバネを，a だけ伸ばすのに必要な仕事 W.

ばねが a だけ伸びているとき，ばねは $F=-kx$ の力で縮もうとする.（ばねを伸ばす方向に x 軸の正の方向をとっているので，マイナスがつく）．したがって，これに対抗するために手が加える力は，$-F=kx$ となる．x だけ伸びているばねをさらに $\mathrm{d}x$ だけ微小にのばすのに必要な仕事は $(-F)\mathrm{d}x=kx\mathrm{d}x$ なので，これを $x=0$ から $x=a$ まで全て足し合わせることによって，

$$W=\int_0^a(-F)\mathrm{d}x=\int_0^a kx\mathrm{d}x=\boxed{\frac{1}{2}ka^2}$$