

問題1 以下のベクトル \vec{a} の大きさと、その方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

(1-1) $\vec{a} = (3, 4)$

ベクトルの大きさは、 $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

単位ベクトルは、元のベクトルを大きさを割って、 $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}| = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(1-2) $\vec{a} = (1, -2)$

ベクトルの大きさは、 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

単位ベクトルは、元のベクトルを大きさを割って、 $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}| = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

問題2 xy 平面内に3点 A:(1, -1), B:(0, 2), C:(-1, 0) がある。

(2-1) ベクトル \vec{AB} を求めよ。

$\vec{AB} = (0, 2) - (1, -1) = (-1, 3)$

(2-2) ベクトル \vec{AB} の大きさを求めよ。

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

(2-3) A→B の方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

$\vec{e}_{AB} = \vec{AB}/|\vec{AB}| = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3)$

(2-4) B→C の方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

$\vec{BC} = (-1, 0) - (0, 2) = (-1, -2), \quad |\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$

$\vec{e}_{BC} = \vec{BC}/|\vec{BC}| = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2)$

(2-5) 大きさが3で、A→B の方向を向いたベクトルを求めよ。

$3\vec{e}_{AB} = \frac{3}{\sqrt{10}}(-1, 3)$

(2-6) 大きさが6で, C→Bの方向を向いたベクトルを求めよ.

$$-6\vec{e}_{BC} = \frac{6}{\sqrt{5}}(1, 2)$$

問題3 xy 平面内の点 $P = (x, y)$ の位置ベクトルを \vec{r} , 原点からの距離を r とする.

(3-1) r を x, y , を用いて表せ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(3-2) 位置ベクトル \vec{r} の方向を向いた単位ベクトル \vec{e} を, r, \vec{r} を用いて表せ.

単位ベクトルを作るには, 大きさが割ってやればよいから, $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$

(3-3) 点 P から原点に向かい, 大きさが f のベクトル \vec{F} を求めよ.

点 P から原点に向かう方向の単位ベクトルは $-\vec{e}$ である.

この方向で大きさが f であるから, $\vec{F} = f(-\vec{e}) = -f\frac{\vec{r}}{r}$

問題4 xy 平面内の2点 $A:(2, -2)$, $B:(-1, 2)$ に電荷がある.

xy 座標の単位は [m] とし, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 [\text{Nm}^2\text{C}^{-2}]$ とする.

(4-1) 点 A に $+5[\text{C}]$, 点 B に $+25[\text{C}]$ があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力 \vec{F} を求めよ.

$$\vec{AB} = (-1, 2) - (2, -2) = (-3, 4), \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB} = 9 \times 10^9 \frac{5 \times 25}{5^3} (-3, 4) [\text{N}] = (-27 \times 10^9, 36 \times 10^9) [\text{N}]$$

(4-2) 点 A に $+5[\text{C}]$, 点 B に $+25[\text{C}]$ があるとき, B の電荷が A の電荷に及ぼす力 \vec{F} を求めよ.

$$\vec{BA} = (3, -4), \quad |\vec{BA}| = 5.$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{BA}|^3} \vec{BA} = 9 \times 10^9 \frac{5 \times 25}{5^3} (3, -4) [\text{N}] = (27 \times 10^9, -36 \times 10^9) [\text{N}]$$

(4-3) 点 A に $+5[\text{C}]$, 点 B に $-25[\text{C}]$ があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力 \vec{F} を求めよ.

$$\vec{AB} = (-1, 2) - (2, -2) = (-3, 4), \quad |\vec{AB}| = 5.$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB} = 9 \times 10^9 \frac{5 \times (-25)}{5^3} (-3, 4) [\text{N}] \\ &= (27 \times 10^9, -36 \times 10^9) [\text{N}] \end{aligned}$$

(4-4) 点 A に $+5[C]$, 点 B に $-25[C]$ があるとき, B の電荷が A の電荷に及ぼす力 \vec{F} を求めよ.

$$\vec{BA} = (3, -4), \quad |\vec{BA}| = 5.$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{BA}|^3} \vec{BA} = 9 \times 10^9 \frac{5 \times (-25)}{5^3} (3, -4) [N] \\ &= \boxed{(-27 \times 10^9, 36 \times 10^9) [N]}\end{aligned}$$

(4-5) 点 A に $-5[C]$, 点 B に $-25[C]$ があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力 \vec{F} を求めよ.

$$\vec{AB} = (-1, 2) - (2, -2) = (-3, 4), \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB} = 9 \times 10^9 \frac{(-5) \times (-25)}{5^3} (-3, 4) [N] \\ &= \boxed{(-27 \times 10^9, 36 \times 10^9) [N]}\end{aligned}$$

問題 5 以下の力を単位を [N] として求めよ. (有効数字 1 桁程度の大雑把な計算でよい. 電卓不可)

(5-1) 体重 50kg の人が 2 人, 1m 離れて立っているときに 2 人の間に働く万有引力を求めよ. ただし, 万有引力定数を $G = 7 \times 10^{-11} [\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}]$ とする.

$$F = G \frac{m^2}{r^2} = 7 \times 10^{-11} \frac{50^2}{1^2} [N] = \boxed{1 \times 10^{-7} [N]}$$

(5-2) $1[C]$ の電荷が 2 つ, 1m 離れて存在しているとき, これらの間に働くクーロン力を求めよ.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{1^2}{1^2} [N] = \boxed{9 \times 10^9 [N]}$$