

基礎力学演習 期末試験

2017年7月24日 担当：佐藤 純

問題 1 質量 m の物体が x 軸上を一次元運動している。物体は場所 x で外力 $F(x)$ を受けるとする。

- (1-1) 物体の運動方程式を書け。
- (1-2) 外力のポテンシャル $U(x)$ は $F(x)$ を使ってどう書けるか。
- (1-3) 時刻 $t = t_1, t_2$ における物体の位置を x_1, x_2 , 速度を v_1, v_2 とすると,
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2)$$
 が成り立つこと (エネルギー保存則) を示せ。

問題 2 質量 m の物体が xy 面内を運動している。物体の位置を極座標で $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ と表す。

- (2-1) 物体の速度 \vec{v} を $\dot{r}, \dot{\theta}$ を用いて表せ。
- (2-2) 物体の運動量 \vec{P} を求めよ。
- (2-3) 物体の角運動量 \vec{L} を求めよ。

問題 3 質量 m の物体が xy 面内を運動している。物体は外力 $F(x, y) = \begin{pmatrix} -kx \\ -mg \end{pmatrix}$ を受けるとする。

- (3-1) 物体の運動方程式を書け。
- (3-2) 運動方程式の一般解を求めよ。(答えのみでよい)
- (3-3) 時刻 $t = 0$ で $(x, y) = (0, 0)$, $(\dot{x}, \dot{y}) = (v_0, 0)$ という初期条件のもと, 運動を決定せよ。
- (3-4) この外力は保存力であることを示せ。
- (3-5) 原点を基準点として, ポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ。

問題 4 質量が m_1, m_2 の2つのおもり 1, 2 を, バネ定数 k , 自然長 l のバネの両端につないで, 机の上に置いてある。最初おもり 1 は $x = 0$, おもり 2 は $x = l$ にあり, 静止していたとする。時刻 $t = 0$ に, おもり 2 に初速度 v_0 を与えた。摩擦, 空気抵抗などは無視できるものとする。

- (4-1) 2つのおもりの位置をそれぞれ x_1, x_2 として, 運動方程式を書き下せ。
- (4-2) 重心座標の運動方程式を書き, これを解け。
- (4-3) 相対座標の運動方程式を書き, これを解け。

問題 5 以下の設問に答えよ。

- (5-1) 質量 m_1, m_2, \dots, m_N の N 個の質点が場所 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ にあるとする。重力加速度を方向も含めて \vec{g} とするとき, 重力がこれらの質点に及ぼすトルクの合計は, 全質量が重心にあるときの重力のトルクに等しいことを示せ。
- (5-2) 半径 a , 質量 m の球の, 中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。
- (5-3) 地上の高い地点から質量 m のボールをそっと放し, ボールを落下させる。その際, ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし, その比例定数を γ とする。時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求め, グラフを描け。
- (5-4) バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け, 他端を固定する。おもりが机の上を動く際に, 速度に比例した十分に小さい摩擦力が働くとし, 比例定数を γ とする。おもりにつり合いの位置で初速度 v_0 を与えた時, その後のおもりの運動を決定し, 結果をグラフに表せ。