

基礎力学演習 第6回 エネルギーと仕事

2017年5月22日 担当：佐藤 純

問題1 単振り子の振れ角 θ に対する運動方程式は、以前やったように

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta$$

で与えられる。両辺に $\dot{\theta}$ をかけて一回積分することにより、エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{定数}$$

を導け。ただし、おもりの速度は $v = l\dot{\theta}$ で、おもりの高さは $y = l(1 - \cos \theta)$ で与えられることを用いてよい。

問題2 地上に質量 m のボールが置いてある。鉛直上向きに z 軸を取る。重力加速度を g とする。

- (2-1) ボールを高さ $z = h$ の地点まで持ち上げるのに必要な仕事量 W を求めよ。
- (2-2) 高さ z におけるこのボールの位置エネルギーは $U(z) = mgz$ で与えられる。このとき、関係式 $W = U(h) - U(0)$ を確認せよ。
- (2-3) 高さ z においてボールが受ける力 $F(z)$ は、 $F(z) = -U'(z)$ で与えられることを確認せよ。
- (2-4) 位置エネルギーは基準点 $z = 0$ から力を積分することによって得られること

$$U(h) = \int_0^h \{-F(z)\} dz$$

を確認せよ。

問題3 摩擦のない床にバネ定数 k のバネがあり、左端は固定、右端には質量 m のおもりが付けられている。バネ左端から右端に向かって x 軸を取り、バネが自然長の位置を $x = 0$ とする。

- (3-1) バネが x だけ伸びているとき、さらに dx だけ伸ばすのに必要な仕事量 dW を求めよ。
- (3-2) 上の結果を $x = 0$ から $x = a$ まで足し合わせることによって、自然長のバネを a だけ伸ばすのに必要な仕事量 W を求めよ。
- (3-3) バネが x だけ伸びているとき持っている弾性エネルギーは $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ で与えられる。このとき、関係式 $W = U(a) - U(0)$ を確認せよ。
- (3-4) おもりが位置 x においてバネから受ける力は $F(x) = -U'(x)$ で与えられることを確認せよ。
- (3-5) 位置エネルギーは基準点 $x = 0$ から力を積分することによって得られること

$$U(a) = \int_0^a \{-F(x)\} dx$$

を確認せよ。