基礎力学演習　第1回　運動のベクトル表示

2017 年 4 月 17 日　　担当：佐藤 純

問題 1 xy-平面内を原点 $(0,0)$ を中心に左回りに等速円運動する物体を考える．
円運動の半径を r, 角速度を ω とする．

(1-1) 初期時刻 $t=0$ において物体は $(x,y)=(r,0)$ にあるとする．
時刻 t における物体の位置ベクトル $\vec{r}(t)$, 速度ベクトル $\vec{v}(t)$, 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ を求めよ．

(1-2) 位置ベクトルと速度ベクトルは常に直交していることを示せ．

(1-3) 加速度ベクトルは，常に「物体から原点に向かう向き」にあることを示せ．

(1-4) 速度ベクトルの大きさ $v=|\vec{v}|$ と加速度ベクトルの大きさ $a=|\vec{a}|$ を，r, ω を用いて表せ．

問題 2 xy-平面内における物体の運動を，極座標で記述することを考える．
時刻 t における物体の位置の xy-座標を (x,y)，極座標を (r,θ) とする．

(2-1) (x,y) を (r,θ) の式で表せ．

(2-2) $\left(\dfrac{\partial x}{\partial r},\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_r$，$\left(\dfrac{\partial x}{\partial \theta},\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\right)$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_\theta$ を求めよ．

(2-3) 前問で求めた $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ を極座標における (物体とともに動く) 基本ベクトルと定める．
それに対し，xy-座標における (動かない) 基本ベクトルを $\vec{e}_x=(1,0)$, $\vec{e}_y=(0,1)$ とする．
$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ を原点を始点として，$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ を物体の位置を始点として図示せよ．

(2-4) 時刻 t における物体の位置ベクトル

$$\vec{r}=(x,y)=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y$$

は，極座標を用いると

$$\vec{r}=r\vec{e}_r$$

と書けることを示せ．

(2-5) 時刻 t における物体の速度ベクトル

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=(\dot{x},\dot{y})=\dot{x}\vec{e}_x+\dot{y}\vec{e}_y$$

は，極座標を用いると

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ．

(2-6) 同様に，物体の加速度ベクトル

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=(\ddot{x},\ddot{y})=\ddot{x}\vec{e}_x+\ddot{y}\vec{e}_y$$

は，極座標を用いると

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

と書けることを示せ．

(2-7) 角速度 ω の等速円運動の場合に，具体的に $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ の極座標表示を計算し，
問題 **(1-2)**～**(1-4)** の事実を確認せよ．