物理学演習II　第14回　3次元の閉じ込め，期待値，不確定性関係

2017年1月20日　　担当：佐藤 純

問題1 3辺の長さがa, b, cの直方体に閉じ込められた質量mの粒子を考える(下図参照)．すなわち，箱の中では$V=0$, 外では$V=\infty$のポテンシャルV中を運動する質量mの粒子を考える．

(1-1) 箱の内部において，この粒子の波動関数$\psi(x,y,z)$が満たすべきSchrödinger方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

である．波動関数を

$$\psi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

と変数分離したとき，$X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$が満たす微分方程式を求めよ．

(1-2) 一次元閉じ込め$(0<x<a)$の場合のSchrödinger方程式

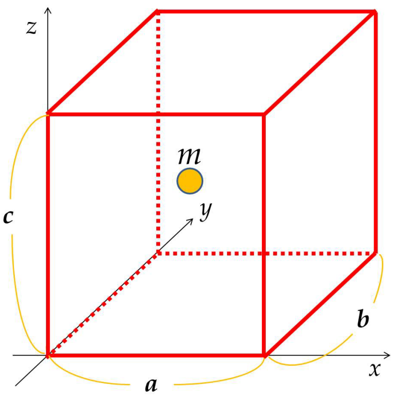
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=E\psi(x)$$

の解

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x,\qquad E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

を用いて，3次元閉じ込めの場合の波動関数$\psi(x,y,z)$およびエネルギーEを決定せよ．

(1-3) $b=c=2a$の場合に，基底状態エネルギー，第1, 2, 3励起エネルギーを求め，それぞれの縮退度を述べよ．



問題2 1次元の領域$0<x<a$に閉じ込められた質量mの粒子の波動関数は

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

で表される．

(2-1) 位置$\hat{x}$と運動量$\hat{p}_x$の期待値$\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}_x\rangle$を求めよ．

(2-2) 位置$\hat{x}$と運動量$\hat{p}_x$の2乗の期待値$\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}_x^2\rangle$を求めよ．

(2-3) 位置の不確かさΔxと運動量の不確かさΔp_xが

$$\Delta x=\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle-\langle\hat{x}\rangle^2},\qquad\Delta p_x=\sqrt{\langle\hat{p}_x^2\rangle-\langle\hat{p}_x\rangle^2}$$

で求まるとき，

$$\Delta x\cdot\Delta p_x>\hbar/2$$

となることを示せ．