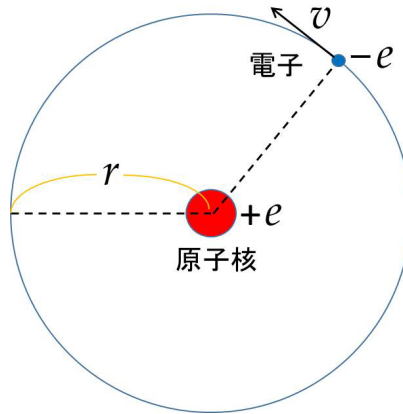


問題1 [ボーアの原子模型]

質量  $m$ 、電荷  $-e$  の電子が、電荷  $+e$  の原子核の周りを半径  $r$ 、速度  $v$  で等速円運動しているとす。



(1-1) この電子の運動量の大きさ  $p$  を求めよ。

$$p = mv$$

(1-2) この電子の角運動量の大きさ  $L$  を求めよ。

$$L = rp = mrv$$

(1-3) 運動量  $p$  の粒子の物質波の波長  $\lambda$  が

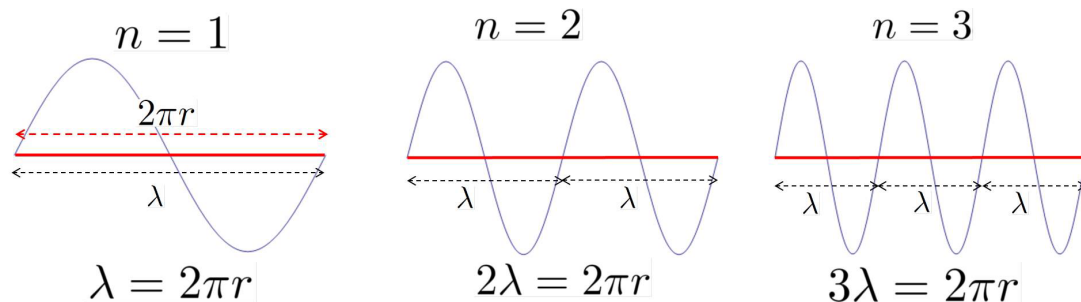
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

で与えられるというド・ブロイの関係式から、プランク定数  $h$  は角運動量の次元を持つことを示せ。

$h = p\lambda$  より、 $h$  は運動量×距離なので、角運動量の次元を持っている。

(1-4) 電子の軌道円周長が物質波の波長  $\lambda$  の整数倍になるというボーアの量子化条件を式で表せ。

$$2\pi r = n\lambda$$



(1-5) そのとき、電子の角運動量  $L$  がディラック定数  $\hbar$  の整数倍に量子化されることを示せ。

$\lambda = \frac{h}{p}$  を  $2\pi r = n\lambda$  に代入すると  $2\pi r = \frac{nh}{p}$  なので、 $L = rp = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$  を得る。

ただし、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  である。

(1-6) 電子の円運動の遠心力と、原子核から受ける静電気力のつり合いの式を書け。

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(1-7) このつり合いの式と、ボーアの量子化条件から、電子の円運動の半径  $r$  と速度  $v$  を求めよ。

$L = n\hbar = \frac{nh}{2\pi}$  であり、 $L = rp = rmv$  なので、 $v = \frac{nh}{2\pi mr}$  である。これをつりあいの式に代入して、

$$m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^2} \frac{1}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

となり、これを  $r$  について解くと、

$$\boxed{r =} m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2} \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} = \boxed{\frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} n^2}$$

となる。これを  $v = \frac{nh}{2\pi mr}$  に代入すれば速度  $v$  が

$$\boxed{v =} \frac{nh}{2\pi m} \frac{\pi m e^2}{h^2 \epsilon_0 n^2} = \boxed{\frac{e^2}{2h\epsilon_0 n}}$$

と求まります。

(1-8) 電子の運動エネルギーは  $\frac{1}{2}mv^2$ 、静電エネルギーは  $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  であることから、電子の全エネルギー  $E$  を求めよ。

$$\boxed{E =} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}m \frac{e^4}{4h^2\epsilon_0^2 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi m e^2}{h^2 \epsilon_0 n^2} = \boxed{-\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \frac{1}{n^2}}$$

(1-9) アインシュタインの光量子論によると、振動数  $\nu$  の光子のエネルギーは  $h\nu$  と書ける。今、電子が状態  $n_1$  から  $n_2$  に遷移して ( $n_1 > n_2$ )、波長  $\lambda$  の光を放出したとすると、リュードベリの公式は

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

と書ける。リュードベリ定数  $R$  を求めよ。

光の波長  $\lambda$  と振動数  $\nu$  は関係式  $c = \lambda\nu$  を満たすので、光子のエネルギーは

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

と書ける。ただし、 $c$  は光速である。

電子が状態  $n_1$  から  $n_2$  に遷移して波長  $\lambda$  の光を放出したとすると

$$h \frac{c}{\lambda} = E_{n_1} - E_{n_2}$$

なので

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8h^3 c \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

となる。したがって、リュードベリ定数は

$$\boxed{R = \frac{me^4}{8h^3 c \epsilon_0^2}}$$

となる。