物理学演習 II　第 7 回　ローレンツ力

2016 年 11 月 14 日　　担当：佐藤 純

問題 1 ［ローレンツ力］

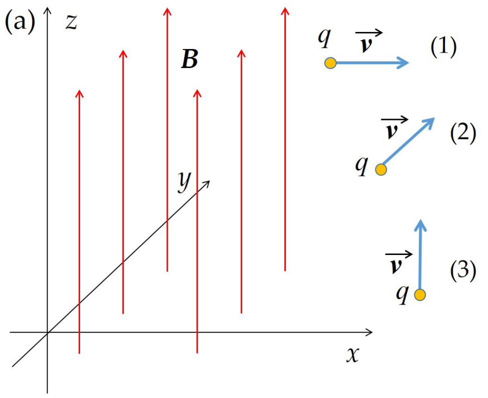
下図 (a) のように，z 軸方向の一様な磁束密度 $\overrightarrow{B} = (0, 0, B_z)$ の中を電荷 q が速度 $\vec{v}$ で運動しているとき，電荷が受ける力 $\overrightarrow{F}$ を求め，図中に描きこめ．

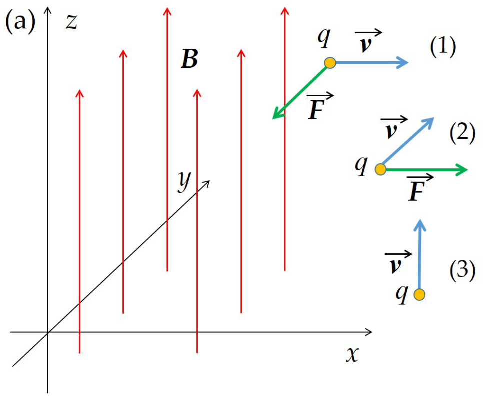
$\boxed{\overrightarrow{F} = q\vec{v} \times \overrightarrow{B}}$ より，

(1-1) $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$　　$\boxed{\overrightarrow{F} = (0, -qv_xB_z, 0)}$

(1-2) $\vec{v} = (0, v_y, 0)$　　$\boxed{\overrightarrow{F} = (qv_yB_z, 0, 0)}$

(1-3) $\vec{v} = (0, 0, v_z)$　　$\boxed{\overrightarrow{F} = (0, 0, 0)}$





問題 2 ［古典粒子の円運動］

長さ r のロープがあり，片端が原点に固定され，もう片端には質量 m のオモリがつながれている．オモリはロープに引っ張られつつ，原点を中心に xy 面内を反時計回りに角速度 ω で回転している．（下図 (a) 参照．）時刻 $t = 0$ においてオモリは $(x, y) = (r, 0)$ にあるとする．

(2-1) 時刻 t におけるオモリの位置 $\vec{r}(t)$ を求めよ．

角速度 ω なので，オモリは 1 秒間に角度 ω だけ回るので，t 秒間に角度 ωt だけ回る．

$\boxed{\vec{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)}$

(2-2) 時刻 t におけるオモリの速度 $\vec{v}(t)$ およびその大きさ $v = |\vec{v}(t)|$ を求めよ．

速度ベクトルは位置ベクトルを時間で微分すれば求まる．

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\omega t, r\sin\omega t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t) = \boxed{r\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)}$$

$$v = |\vec{v}(t)| = r\omega|(-\sin\omega t, \cos\omega t)| = \boxed{r\omega}$$

(2-3) 時刻 t におけるオモリの加速度 $\vec{a}(t)$ およびその大きさ $a = |\vec{a}(t)|$ を求めよ．

加速度ベクトルは速度ベクトルを時間で微分すれば求まる．

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = r\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\sin\omega t, \cos\omega t) = r\omega(-\omega\cos\omega t, -\omega\sin\omega t) = \boxed{-r\omega^2(\cos\omega t, \sin\omega t)}$$

$$a = |\vec{a}(t)| = r\omega^2|(\cos\omega t, \sin\omega t)| = \boxed{r\omega^2}$$

(2-4) 速度ベクトルは常に位置ベクトルと直交することを示せ．

$$\boxed{\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)} = r^2\omega(\cos\omega t, \sin\omega t)\cdot(-\sin\omega t, \cos\omega t)$$

$$= r^2\omega\left\{(\cos\omega t)(-\sin\omega t) + (\sin\omega t)(\cos\omega t)\right\}\boxed{= 0}$$

(2-5) 加速度ベクトルは常にオモリから原点に向かう向きにあることを示せ.

$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$

(2-6) “等速”円運動なのに加速度がゼロでないのはなぜか？

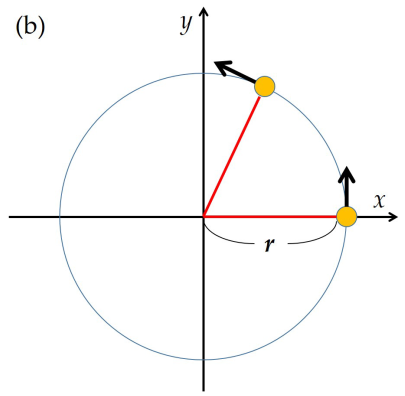
$\boxed{\text{速度ベクトルの大きさは一定だが，方向は変化するので}}$

(2-7) ロープがオモリを引っ張る力の大きさ f は

$$\boxed{f = m\frac{v^2}{r}}$$

と書けることを示せ.

運動方程式より，$f = ma = mr\omega^2$ であるが，$v = r\omega$ より $\omega = \dfrac{v}{r}$ なのでこれを代入して $f = mr\left(\dfrac{v}{r}\right)^2 = m\dfrac{v^2}{r}$ を得る.



$\boxed{\text{問題 3}}$ ［サイクロトロン運動］

z 軸方向の一様な磁束密度 $\overrightarrow{B} = (0, 0, B_z)$ の中で，電荷 q の荷電粒子を原点から初速度 $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)$ で打ち出す．(下図 (b) 参照)

(3-1) 荷電粒子の運動方程式を書け.

$m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = q\vec{v} \times \overrightarrow{B} = q(v_y B_z, -v_x B_z, 0)$ より，

$$\boxed{\begin{cases} mv'_x = qv_y B_z \\ mv'_y = -qv_x B_z \\ mv'_z = 0 \end{cases}}$$

(3-2) 運動方程式を一回積分し，時刻 t での速度 $\vec{v}(t)$ を求めよ.

$v'_x = \frac{qB_z}{m} v_y$ の両辺を時間 t で微分して，

$$v''_x = \frac{qB_z}{m} v'_y = \frac{qB_z}{m}\left(-\frac{qB_z}{m} v_x\right) = -\frac{q^2 B_z^2}{m^2} v_x$$

より，$v_x(t) = C_1 \cos \frac{qB_z}{m} t + C_2 \sin \frac{qB_z}{m} t$.

$v'_x = \frac{qB_z}{m} v_y$ より，$v_y = \frac{m}{qB_z} v'_x$ なので，

$$v_y(t) = \frac{m}{qB_z}\left(-\frac{qB_z}{m} C_1 \sin \frac{qB_z}{m} t + \frac{qB_z}{m} C_2 \cos \frac{qB_z}{m} t\right)$$

$$= -C_1 \sin \frac{qB_z}{m}t + C_2 \cos \frac{qB_z}{m}t$$

$v_z'(t) = 0$ より，$v_z(t) = C_3$．以上より，C_1, C_2, C_3 を積分定数として，

$$\vec{v}(t) = \left(C_1 \cos \frac{qB_z}{m}t + C_2 \sin \frac{qB_z}{m}t, -C_1 \sin \frac{qB_z}{m}t + C_2 \cos \frac{qB_z}{m}t, C_3 \right)$$

初期条件 $\vec{v}(0) = (0, v_0, 0)$ より，$C_1 = 0$, $C_2 = v_0$, $C_3 = 0$ なので，

$$\boxed{\vec{v}(t) = \left(v_0 \sin \frac{qB_z}{m}t, v_0 \cos \frac{qB_z}{m}t, 0 \right)}$$

(3-3) 運動方程式をもう一回積分し，時刻 t での位置 $\vec{r}(t)$ を求めよ．

$$\vec{r}(t) = \left(-v_0 \frac{m}{qB_z} \cos \frac{qB_z}{m}t + C_4, v_0 \frac{m}{qB_z} \sin \frac{qB_z}{m}t + C_5, C_6 \right)$$

初期条件 $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ より，$C_4 = \frac{mv_0}{qB_z}$, $C_5 = C_6 = 0$ なので，

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(\frac{mv_0}{qB_z} \left(1 - \cos \frac{qB_z}{m}t \right), \frac{mv_0}{qB_z} \sin \frac{qB_z}{m}t, 0 \right)}$$

(3-4) 荷電粒子の運動が等速円運動であることを示し，円運動の中心と半径，および角速度と周期を求めよ．

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{mv_0}{qB_z}, 0, 0 \right) + \frac{mv_0}{qB_z} \left(\cos \left(\pi - \frac{qB_z}{m}t \right), \sin \left(\pi - \frac{qB_z}{m}t \right), 0 \right)$$

より，中心 $\boxed{\left(\frac{mv_0}{qB_z}, 0, 0 \right)}$ 半径 $\boxed{\frac{mv_0}{qB_z}}$ 角速度 $\boxed{\omega = \frac{qB_z}{m}}$ の円運動をする．

周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{\frac{2\pi m}{qB_z}}$ となる．