物理学演習II　第4回　電場と電位

2016年10月21日　担当：佐藤 純

問題1 3次元 xyz 空間の原点に電荷 q がある．

(1-1) 点Aの位置ベクトルを $\vec{r}_{\mathrm{A}}$，その大きさを r_{A} とする $(r_{\mathrm{A}} = |\vec{r}_{\mathrm{A}}|)$．
点Aに電荷 q_{A} があるとき，この電荷に働く力 $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ を $\vec{r}_{\mathrm{A}}, r_{\mathrm{A}}$ を使って表せ．

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{A}} = \frac{q q_{\mathrm{A}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}^3}}$$

(1-2) 原点の電荷 q が $\vec{r}$ の位置に電場

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

を発生していると考える．上で求めた力 $\vec{F}_{\mathrm{A}}$ を電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を使って表せ．

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{A}} = q_{\mathrm{A}} \vec{E}(\vec{r}_{\mathrm{A}})}$$

(1-3) 点Bの位置ベクトルを $\vec{r}_{\mathrm{B}}$，その大きさを r_{B} とする $(r_{\mathrm{B}} = |\vec{r}_{\mathrm{B}}|)$．
点Bに電荷 q_{B} があるとき，この電荷に働く力 $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ を電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を使って表せ．

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{B}} = q_{\mathrm{B}} \vec{E}(\vec{r}_{\mathrm{B}})}$$

問題2 x 軸原点に電荷 q がある．

(2-1) 位置 $x = a$ に単位電荷 1[C] があるとき，この単位電荷が受ける力 $E_x(a)$ を求めよ．

$$\boxed{E_x(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}}$$

(2-2) この単位電荷を $x = a$ から $x = b$ まで運ぶのに必要な仕事 $W(a \to b)$ を求めよ．

単位電荷が x にあるときに原点の電荷 q から受ける力は $E_x(x)$ なので，単位電荷を支えるために $-E_x(x)$ の力が必要である．
単位電荷を位置 x から $x + \Delta x$ まで運ぶのに必要な仕事 ΔW は，$\Delta W = -E_x(x)\Delta x$ である．これを全て足し合わせて，

$$\begin{aligned} W(a \to b) &= \sum_{x=a}^{b} \Delta W = -\sum_{x=a}^{b} E_x(x)\Delta x \\ &\to -\int_a^b E_x(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}\right]_a^b = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}} \end{aligned}$$

(2-3) 基準点 (無限遠点) から x まで単位電荷を運ぶのに必要な仕事 $W(\infty \to x)$ を求めよ．

$$W(\infty \to x) = \lim_{a\to\infty} W(a \to x) = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \right) = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}}$$

(2-4) 位置 x における電位 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = W(\infty \to x)$$

で定義する．
位置 x において単位電荷が受ける力は

$$E_x(x) = -\phi'(x)$$

で与えられることを確認せよ．

電位を空間微分してマイナスとつけると電場になる：

$$-\phi'(x) = -\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \right)' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = E_x(x)$$

(2-5) 3 次元の場合には，原点からの距離 r の点における電位は

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる．位置ベクトル $\vec{r}$ の位置にある単位電荷が受ける力 (=電場) は

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

と書けることを示せ．

まず $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2+y^2+z^2)' = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) \\
&= -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x}{r^3}
\end{aligned}$$

同様に，$\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{y}{r^3}, \quad \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{z}{r^3}$ となるので，

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} \right) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}(x, y, z) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} \\
&= \overrightarrow{E}(\vec{r})
\end{aligned}$$

を得る．