

**問題1** 以下のベクトル  $\vec{a}$  の大きさと、その方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

(1-1)  $\vec{a} = (3, 4)$

ベクトルの大きさは、 $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

単位ベクトルは、元のベクトルを大きさで割って、 $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}| = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(1-2)  $\vec{a} = (1, -2, 2)$

ベクトルの大きさは、 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$

単位ベクトルは、元のベクトルを大きさで割って、 $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}| = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

**問題2** 3次元空間に3点 A:(1, -1, 2), B:(0, 2, -1), C:(-1, 0, 1) がある。

(2-1) ベクトル  $\vec{AB}$  を求めよ。

$\vec{AB} = (0, 2, -1) - (1, -1, 2) = (-1, 3, -3)$

(2-2) ベクトル  $\vec{AB}$  の大きさを求めよ。

$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$

(2-3) A→B の方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

$\vec{e}_{AB} = \vec{AB}/|\vec{AB}| = \frac{1}{\sqrt{19}}(-1, 3, -3)$

(2-4) B→C の方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

$\vec{BC} = (-1, 0, 1) - (0, 2, -1) = (-1, -2, 2), \quad |\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$

$\vec{e}_{BC} = \vec{BC}/|\vec{BC}| = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)$

(2-5) 大きさが3で、A→B の方向を向いたベクトルを求めよ。

$3\vec{e}_{AB} = \frac{3}{\sqrt{19}}(-1, 3, -3)$

(2-6) 大きさが6で, C→Bの方向を向いたベクトルを求めよ.

$$-6\vec{e}_{BC} = \boxed{(2, 4, -4)}$$

**問題3** 3次元空間の点P = (x, y, z)の位置ベクトルを $\vec{r}$ , 原点からの距離をrとする.

(3-1) rをx, y, zを用いて表せ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(3-2) 位置ベクトル $\vec{r}$ の方向を向いた単位ベクトル $\vec{e}$ を, r,  $\vec{r}$ を用いて表せ.

単位ベクトルを作るには, 大きさを割ってやればよいから,  $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$

(3-3) 点Pから原点に向かい, 大きさがfのベクトル $\vec{F}$ を求めよ.

点Pから原点に向かう方向の単位ベクトルは $-\vec{e}$ である.  
この方向で大きさがfであるから,  $\vec{F} = f(-\vec{e}) = \boxed{-f\frac{\vec{r}}{r}}$

**問題4** 距離rだけ離れた2つの電荷 $q_1$ と $q_2$ の間にはクーロン力 $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ が働く.

(4-1) 電荷の単位をクーロンとし, [C]で表す. 比例定数 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ の次元を[N], [m], [C]で表せ.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Fr^2}{q_1 q_2} = \boxed{[\text{Nm}^2\text{C}^{-2}]}$$

(4-2) この単位系において真空の誘電率 $\epsilon_0$ は真空中の光速cを使って $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$ と書ける.  
比例定数 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ の値を求めよ. ただし, 真空の光速はおよそ30万km/秒である.

30万km/秒 =  $3 \times 10^8$ [m/s]であるから,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} = \boxed{9 \times 10^9 [\text{Nm}^2\text{C}^{-2}]}$$

**問題5** 以下の力を単位を[N]として求めよ. (有効数字1桁程度の大雑把な計算でよい. 電卓不可)

(5-1) 体重50kgの人が2人, 1m離れて立っているときに2人の間に働く万有引力を求めよ.  
ただし, 万有引力定数を $G = 7 \times 10^{-11} [\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}]$ とする.

$$F = G \frac{m^2}{r^2} = 7 \times 10^{-11} \frac{50^2}{1^2} [\text{N}] = \boxed{1 \times 10^{-7} [\text{N}]}$$

(5-2) 1[C] の電荷が2つ, 1m 離れて存在しているとき, これらの間に働くクーロン力を求めよ.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{1^2}{1^2} [\text{N}] = \boxed{9 \times 10^9 [\text{N}]}$$

**問題 6** 3次元空間の2点 A:(-1,0,1), B:(0,2,-1) に電荷がある.  $xyz$  座標の単位は [m] とする.

(6-1) 点 A に +3[C], 点 B に +1[C] があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-1, 0, 1) - (0, 2, -1) = (-1, -2, 2), & |\vec{AB}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3. \\ \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 1}{3^3} (-1, -2, 2) [\text{N}] = \boxed{(-1 \times 10^9, -2 \times 10^9, 2 \times 10^9) [\text{N}]} \end{aligned}$$

(6-2) 点 A に +3[C], 点 B に +1[C] があるとき, B の電荷が A の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ.

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= (1, 2, -2), & |\vec{BA}| &= 3. \\ \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{BA}|^3} \vec{BA} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 1}{3^3} (1, 2, -2) [\text{N}] = \boxed{(1 \times 10^9, 2 \times 10^9, -2 \times 10^9) [\text{N}]} \end{aligned}$$

(6-3) 点 A に +3[C], 点 B に -1[C] があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-1, 0, 1) - (0, 2, -1) = (-1, -2, 2), & |\vec{AB}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3. \\ \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times (-1)}{3^3} (-1, -2, 2) [\text{N}] \\ &= \boxed{(1 \times 10^9, 2 \times 10^9, -2 \times 10^9) [\text{N}]} \end{aligned}$$

(6-4) 点 A に +3[C], 点 B に -1[C] があるとき, B の電荷が A の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ.

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= (1, 2, -2), & |\vec{BA}| &= 3. \\ \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{BA}|^3} \vec{BA} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times (-1)}{3^3} (1, 2, -2) [\text{N}] \\ &= \boxed{(-1 \times 10^9, -2 \times 10^9, 2 \times 10^9) [\text{N}]} \end{aligned}$$

(6-5) 点 A に -3[C], 点 B に -1[C] があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (-1, 0, 1) - (0, 2, -1) = (-1, -2, 2), & |\vec{AB}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3. \\ \vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{AB}|^3} \vec{AB} = 9 \times 10^9 \frac{(-3) \times (-1)}{3^3} (-1, -2, 2) [\text{N}] \\ &= \boxed{(-1 \times 10^9, -2 \times 10^9, 2 \times 10^9) [\text{N}]} \end{aligned}$$