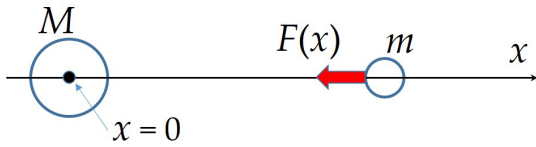


物理学演習II 第2回 重力ポテンシャル

2016年9月30日 担当：佐藤 純

問題1 地球の質量を M とすると、地球の中心から距離 x の位置にある質量 m の物体は、地球から万有引力 $F(x) = -G\frac{Mm}{x^2}$ を受ける。



(1-1) 質量 m の物体を $x = a$ から $x = b$ まで運ぶのに必要な仕事 W を求めよ。
ただし、 $0 < a < b$ とする。

重力 $F(x)$ に対抗するため、手は $-F(x)$ の力を加えなければならない。 $-F(x)$ の力で dx だけ動かしたとき、手がした仕事は $-F(x)dx$ である。これを $x = a$ から $x = b$ まで足し合わせる：

$$W = \int_a^b \{-F(x)\} dx = \int_a^b \left(G\frac{Mm}{x^2} \right) dx = \left[-G\frac{Mm}{x} \right]_a^b = \boxed{G\frac{Mm}{a} - G\frac{Mm}{b}}$$

(1-2) このとき、物体は仕事 W をされることによって、ポテンシャルエネルギーを蓄える。場所 x におけるポテンシャルエネルギーを $U(x)$ とするとき、 $U(b) - U(a)$ を求めよ。

$x = a$ で物体はポテンシャルエネルギー $U(a)$ を持っていたが、手から仕事 W をされたことによって、その分エネルギーを蓄えたので、 $U(a) + W$ となる。これが、 $x = b$ でのポテンシャルエネルギーとなる。すなわち、 $U(b) = U(a) + W$ である。したがって、

$$U(b) - U(a) = W = \boxed{G\frac{Mm}{a} - G\frac{Mm}{b}}$$

(1-3) ポテンシャルの基準点を $x = a$ に選ぶ。すなわち、 $U(a) = 0$ とする。
このとき、場所 x におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ。

前の式で $b = x$ として、

$$U(x) - U(a) = G\frac{Mm}{a} - G\frac{Mm}{x}$$

となるが、 $U(a) = 0$ より、

$$\boxed{U(x) = G\frac{Mm}{a} - G\frac{Mm}{x}}$$

(1-4) ポテンシャルの基準点を無限遠点 $x = \infty$ に選んだときの、場所 x におけるポテンシャルエネルギー $U(x)$ を求めよ。

基準点を $a \rightarrow \infty$ とすると,

$$U(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(G \frac{Mm}{a} - G \frac{Mm}{x} \right) = \boxed{-G \frac{Mm}{x}}$$

- (1-5) 地上にある物体を, 鉛直上方に打ち上げるとき, 宇宙に脱出するために必要な初速度 v を求めよ. ただし, 地球の半径を R とする.

打ち上げた直後の物体のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2 + U(R)$ である. また, 脱出できるぎりぎりの速度で打ち上げた場合, 宇宙に脱出後の速度は $v = 0$ となる. したがって, 宇宙に脱出して飛び去った後の物体のエネルギーは $U(\infty)$ である. エネルギー保存則から, $\frac{1}{2}mv^2 + U(R) = U(\infty)$ となる. $U(R) = -G \frac{Mm}{R}$, $U(\infty) = 0$ より,

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$