

# 物理学演習II 第1回 仕事と位置エネルギー

2016年9月23日 担当：佐藤 純

**問題1** 地上に質量  $m$  のボールが置いてある。鉛直上向きに  $z$  軸を取る。重力加速度を  $g$  とする。

(1-1) ボールを高さ  $z = h$  の地点まで持ち上げるのに必要な仕事量  $W$  を求めよ。

仕事  $W[\text{J}] = \text{力}[\text{N}] \times \text{距離}[\text{m}]$  である。ボールには重力  $-mg$  が働いているので、それを支えるのに  $mg$  の力が必要である。一定の力  $mg$  で  $h$  だけボールを動かすので、必要な仕事量は

$$W = mgh$$

である。

(1-2) 高さ  $z$  におけるこのボールの位置エネルギーは  $U(z) = mgz$  で与えられる。このとき、関係式  $W = U(h) - U(0)$  を確認せよ。

$$U(h) - U(0) = mgh - mg \times 0 = mgh = W$$

(1-3) 高さ  $z$  においてボールが受ける力  $F(z)$  は、 $F(z) = -U'(z)$  で与えられることを確認せよ。

ポテンシャルエネルギーを空間微分してマイナスとつけると力になる：

$$-U'(z) = -(mgz)' = -mg = F(z)$$

(1-4) 位置エネルギーは基準点  $z = 0$  から力を積分することによって得られること

$$U(h) = \int_0^h \{-F(z)\} dz$$

を確認せよ。

$$\int_0^h \{-F(z)\} dz = \int_0^h mg dz = [mgz]_0^h = mgh = U(h)$$

**問題2** 摩擦のない床にバネ定数  $k$  のバネがあり、左端は固定、右端には質量  $m$  のおもりが付けられている。バネ左端から右端に向かって  $x$  軸を取り、バネが自然長の位置を  $x = 0$  とする。

(2-1) バネが  $x$  だけ伸びているとき、さらに  $dx$  だけ伸ばすのに必要な仕事量  $dW$  を求めよ。

バネは  $x$  だけ伸びているので、ばねが縮もうとする力は  $-kx$  である。それを支えるために、手は  $+kx$  のちからでバネを引っ張らなければならない。仕事は力  $\times$  移動距離なので、 $dW = kx dx$  となる。

- (2-2) 上の結果を  $x = 0$  から  $x = a$  まで足し合わせることによって、自然長のバネを  $a$  だけ伸ばすのに必要な仕事量  $W$  を求めよ。

$$W = \int dW = \int_0^a kx dx = \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_0^a = \frac{1}{2} ka^2$$

- (2-3) バネが  $x$  だけ伸びているとき持っている弾性エネルギーは  $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$  で与えられる。このとき、関係式  $W = U(a) - U(0)$  を確認せよ。

$$U(a) - U(0) = \frac{1}{2} ka^2 - \frac{1}{2} k \times 0^2 = \frac{1}{2} ka^2 = W$$

- (2-4) おもりが位置  $x$  においてバネから受ける力は  $F(x) = -U'(x)$  で与えられることを確認せよ。

ポテンシャルエネルギーを空間微分してマイナスとつけると力になる：

$$-U'(x) = -\left(\frac{1}{2} kx^2\right)' = -kx = F(x)$$

- (2-5) 位置エネルギーは基準点  $x = 0$  から力を積分することによって得られること

$$U(a) = \int_0^a \{-F(x)\} dx$$

を確認せよ。

$$\int_0^a \{-F(x)\} dx = \int_0^a kx dx = \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_0^a = \frac{1}{2} ka^2 = U(a)$$