物理学演習II　第14回　不確定性原理

2015年12月18日　担当：佐藤 純

問題1 [**期待値**]

勝つと100円，負けると20円貰える賭けがある．1回の勝負の参加費は50円である．
この勝負に勝つ確率は0.2，負ける確率は0.8であるとする．

(1-1) この勝負を100回したとき，何回勝つことが「期待」できるか．

$\boxed{20\text{回}}$

(1-2) そのときの総獲得賞金はいくらか．

$20 \times 100 + 80 \times 20 = \boxed{3600\text{円}}$

(1-3) この結果から,「1回だけ」勝負をしたときの獲得賞金はいくらになることが「期待」できるか.

$\boxed{36\text{円}}$

(1-4) この結果から，この賭けはするべきか，するべきでないか.

参加費は50円で36円より高いので，$\boxed{\text{すべきでない}}$

(1-5) 勝つと X_1 円，負けると X_2 円貰えるとし，勝つ確率を P_1，負ける確率を P_2 としたとき，1回の勝負の獲得賞金の期待値を求めよ.

$\boxed{P_1 X_1 + P_2 X_2}$

問題2 [**ゆらぎ**]

Aクラスのテストの得点は $A_1 = 20,\ A_2 = 90,\ A_3 = 30,\ A_4 = 100$ であり,
Bクラスのテストの得点は $B_1 = 56,\ B_2 = 64,\ B_3 = 57,\ B_4 = 63$ であった.

(2-1) それぞれのクラスの平均点 $\langle A \rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4} A_n$ および $\langle B \rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4} B_n$ を求めよ.

$\langle A \rangle = (20 + 90 + 30 + 100)/4 = \boxed{60}$
$\langle B \rangle = (56 + 64 + 57 + 63)/4 = \boxed{60}$

(2-2) それぞれのクラスの点数の「ゆらぎ」の2乗

$(\Delta A)^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(A_n - \langle A \rangle)^2$ および $(\Delta B)^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(B_n - \langle B \rangle)^2$ を求めよ.

$(\Delta A)^2 = (40^2 + 30^2 + 30^2 + 40^2)/4 = \boxed{1250}$
$(\Delta B)^2 = (4^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2)/4 = \boxed{12.5}$

(2-3) Aクラスの2乗平均 $\langle A^2 \rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4} A_n^2$ を求めよ.

$\langle A^2 \rangle = (20^2 + 90^2 + 30^2 + 100^2)/4 = \boxed{4850}$

(2-4) 関係式 $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ が成り立っていることを確かめよ.

$\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = 4850 - 60^2 = 1250 = (\Delta A)^2$

問題 3 [**不確定性原理**]

調和振動子ポテンシャル $V(x) = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ に閉じ込められた質量 m の粒子の基底状態は,
波動関数

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{1}{2}ax^2} \quad \left(a = \frac{m\omega}{\hbar}\right)$$

で表される．積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2}\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いて以下の問いに答えよ.

(3-1) 規格化条件から，定数 A を決定せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = |A|^2\sqrt{\frac{\pi}{a}} = 1$$

より，$\boxed{A = \left(\dfrac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}}$

(3-2) 位置 x と運動量 p の期待値 $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, を求めよ.

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})x(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})\mathrm{d}x = A^2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2}\mathrm{d}x = \boxed{0}$$

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})(-\mathrm{i}\hbar)(-ax)(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{i}\hbar aA^2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2}\mathrm{d}x = \boxed{0}$$

(3-3) 位置 x と運動量 p の 2 乗の期待値 $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$, を求めよ.

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})x^2(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})\mathrm{d}x = A^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2a}}$$

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2(Ae^{-\frac{1}{2}ax^2})\mathrm{d}x = -\hbar^2A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-\frac{1}{2}ax^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\hbar^2A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}\left(-axe^{-\frac{1}{2}ax^2}\right)'\mathrm{d}x = \hbar^2aA^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}\left\{(x)'e^{-\frac{1}{2}ax^2} + x\left(e^{-\frac{1}{2}ax^2}\right)'\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \hbar^2aA^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}\left\{e^{-\frac{1}{2}ax^2} - ax^2e^{-\frac{1}{2}ax^2}\right\}\mathrm{d}x = \hbar^2aA^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x - a\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \boxed{\frac{\hbar^2 a}{2}}$$

(3-4) 位置のゆらぎ Δx と運動量のゆらぎ Δp を求めよ.

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2a}}}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \boxed{\hbar\sqrt{\frac{a}{2}}}$$

(3-5) 不確定性関係 $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$ を示せ。

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2a}}\hbar\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\hbar}{2}$$