物理学演習II　第14回　不確定性原理

2016年1月15日　担当：佐藤 純

問題1 [**期待値**]

勝つと100円，負けると20円貰える賭けがある．1回の勝負の参加費は50円である．
この勝負に勝つ確率は0.2，負ける確率は0.8であるとする．

(1-1) この勝負を100回したとき，何回勝つことが「期待」できるか．

(1-2) そのときの総獲得賞金はいくらか．

(1-3) この結果から,「1回だけ」勝負をしたときの獲得賞金はいくらになることが「期待」できるか．

(1-4) この結果から，この賭けはするべきか，するべきでないか．

(1-5) 勝つと X_1 円，負けると X_2 円貰えるとし，勝つ確率を P_1，負ける確率を P_2 としたとき，1回の勝負の獲得賞金の期待値を求めよ．

問題2 [**ゆらぎ**]

Aクラスのテストの得点は $A_1 = 20,\ A_2 = 90,\ A_3 = 30,\ A_4 = 100$ であり，
Bクラスのテストの得点は $B_1 = 56,\ B_2 = 64,\ B_3 = 57,\ B_4 = 63$ であった．

(2-1) それぞれのクラスの平均点 $\langle A\rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4} A_n$ および $\langle B\rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4} B_n$ を求めよ．

(2-2) それぞれのクラスの点数の「ゆらぎ」の2乗

$(\Delta A)^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(A_n - \langle A\rangle)^2$ および $(\Delta B)^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(B_n - \langle B\rangle)^2$ を求めよ．

(2-3) Aクラスの2乗平均 $\langle A^2\rangle = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{4} A_n^2$ を求めよ．

(2-4) 関係式 $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$ が成り立っていることを確かめよ．

問題3 [**不確定性原理**]

調和振動子ポテンシャル $V(x) = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ に閉じ込められた質量 m の粒子の基底状態は，
波動関数

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{1}{2}ax^2} \quad \left(a = \frac{m\omega}{\hbar}\right)$$

で表される．積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2}\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いて以下の問いに答えよ．

(3-1) 規格化条件から，定数 A を決定せよ．

(3-2) 位置 x と運動量 p の期待値 $\langle x\rangle,\ \langle p\rangle$, を求めよ．

(3-3) 位置 x と運動量 p の2乗の期待値 $\langle x^2\rangle,\ \langle p^2\rangle$, を求めよ．

(3-4) 位置のゆらぎ Δx と運動量のゆらぎ Δp を求めよ．

(3-5) 不確定性関係 $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$ を示せ。