# 物理学演習 II　第 12 回　箱の中の粒子

2015 年 12 月 18 日　担当：佐藤 純

**問題 1** [**3 次元の閉じ込め運動**]

3 辺の長さが $a, b, c$ の直方体に閉じ込められた質量 $m$ の粒子を考える．(下図参照)
すなわち，ポテンシャル

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

中を運動する質量 $m$ の粒子を考える．

**(1-1)** 運動量 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ で運動する質量 $m$ の古典的粒子の運動エネルギーを求めよ．

$E = \dfrac{|\vec{p}|^2}{2m} = \boxed{\dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}}$

**(1-2)** 箱の内部において，この粒子の波動関数 $\psi(x,y,z)$ が満たすべき Schrödinger 方程式を書け．

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

**(1-3)** 波動関数を

$$\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

と変数分離したとき，$X(x)$，$Y(y)$，$Z(z)$ が満たす方程式を求めよ．

**(1-4)** 一次元閉じ込め $(0 < x < a)$ の場合の Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x)$$

の解

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x, \qquad E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を用いて，3 次元閉じ込めの場合の波動関数 $\psi(x,y,z)$ およびエネルギー $E$ を決定せよ．

**(1-5)** $a = b = 2c$ の場合に，基底状態エネルギー，第 1 励起エネルギー，第 2 励起エネルギーを求め，それぞれの縮退度を述べよ．