物理学演習II　第10回　量子力学の原理

2015年12月4日　担当：佐藤 純

問題1 [**正準交換関係**]

位置 x と運動量 p を表す演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ を

$$\hat{p}f(x) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = -\mathrm{i}\hbar f'(x), \quad \hat{x}f(x) = xf(x)$$

で定義する．

(1-1) $\hat{x}\hat{p}f(x)$ を計算せよ．　　**(1-2)** $\hat{p}\hat{x}f(x)$ を計算せよ．

(1-3) これらの結果から，位置と運動量の交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$ を計算せよ．

問題2 [**一次元運動**]

ポテンシャル $V(x)$ の中で x 軸上を運動する質量 m の粒子を考える．この粒子の定常状態における波動関数 $\psi(x)$ はSchrödinger方程式

$$\mathcal{H}\psi(x) = E\psi(x), \qquad \mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

を満たす．

(2-1) ポテンシャルがないとき（$V(x) = 0$），波動関数 $\psi(x) = A\exp\left(\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right)$ はSchrödinger方程式を満たすことを示し，エネルギー E を求めよ．

(2-2) 調和振動子ポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ のとき，波動関数 $\psi(x) = A\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$ はSchrödinger方程式を満たすことを示し，エネルギー E を求めよ．(下図左参照)

問題3 [**一次元の閉じ込め運動**]

ポテンシャル $V(x<0) = V(a<x) = \infty$, $V(0<x<a) = 0$ によって $0 < x < a$ の領域に閉じ込められた質量 m の粒子を考える．(下図右参照)

(3-1) 領域 $0 < x < a$ におけるSchrödinger方程式 $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x)$ の一般解を求めよ．

(3-2) 接続条件 $\psi(0) = \psi(a) = 0$ から，エネルギー E が量子化されることを示せ．

(3-3) 確率の規格化条件 $\int_0^a |\psi(x)|^2\mathrm{d}x = 1$ から，波動関数を決定せよ．