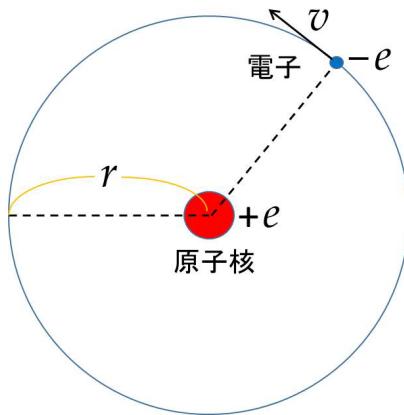


問題1 [ボーアの原子模型]

質量 m , 電荷 $-e$ の電子が, 電荷 $+e$ の原子核の周りを半径 r , 速度 v で等速円運動しているとする。



(1-1) この電子の運動量の大きさ p を求めよ.

$$p = mv$$

(1-2) この電子の角運動量の大きさ L を求めよ.

$$L = rp = mrv$$

(1-3) 運動量 p の粒子の物質波の波長 λ が

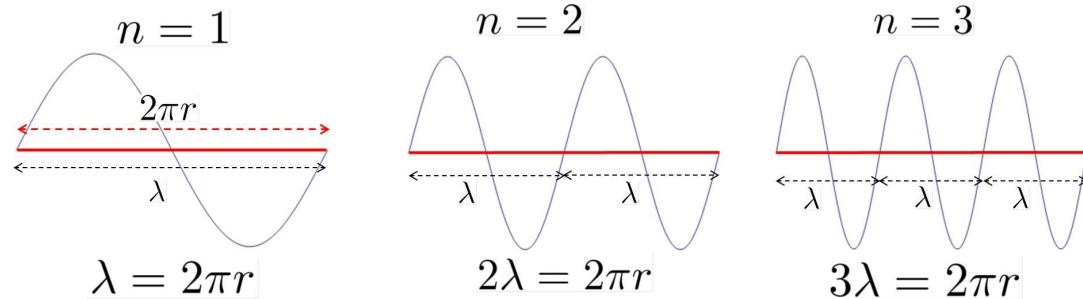
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

で与えられるというド・ブロイの関係式から, プランク定数 h は角運動量の次元を持つことを示せ.

$h = p\lambda$ より, h は運動量×距離なので, 角運動量の次元を持っている.

(1-4) 電子の軌道円周長が物質波の波長 λ の整数倍になるというボーアの量子化条件を式で表せ.

$$2\pi r = n\lambda$$



(1-5) そのとき, 電子の角運動量 L がディラック定数 \hbar の整数倍に量子化されることを示せ.

$\lambda = \frac{h}{p}$ を $2\pi r = n\lambda$ に代入すると $2\pi r = \frac{nh}{p}$ なので, $L = rp = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$ を得る.

ただし, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ である.

(1-6) 電子の円運動の遠心力と, 原子核から受ける静電気力のつり合いの式を書け.

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(1-7) このつり合いの式と、ボーアの量子化条件から、電子の円運動の半径 r と速度 v を求めよ。

$L = n\hbar = \frac{nh}{2\pi}$ であり、 $L = rp = rmv$ なので、 $v = \frac{nh}{2\pi mr}$ である。これをつりあいの式に代入して、

$$m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^2} \frac{1}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

となり、これを r について解くと、

$$r = m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2} \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} = \boxed{\frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} n^2}$$

となる。これを $v = \frac{nh}{2\pi mr}$ に代入すれば速度 v が

$$v = \frac{nh}{2\pi m} \frac{\pi m e^2}{h^2 \epsilon_0 n^2} = \boxed{\frac{e^2}{2h\epsilon_0 n}}$$

と求まります。

(1-8) 電子の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ 、静電エネルギーは $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ であることから、電子の全エネルギー E を求めよ。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}m \frac{e^4}{4h^2\epsilon_0^2 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi m e^2}{h^2 \epsilon_0 n^2} = \boxed{-\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2 n^2}}$$

(1-9) アインシュタインの光量子論によると、振動数 ν の光子のエネルギーは $h\nu$ と書ける。今、電子が状態 n_1 から n_2 に遷移して ($n_1 > n_2$)、波長 λ の光を放出したとすると、リュードベリの公式は

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

と書ける。リュードベリ定数 R を求めよ。

光の波長 λ と振動数 ν は関係式 $c = \lambda\nu$ を満たすので、光子のエネルギーは

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

と書ける。ただし、 c は光速度である。

電子が状態 n_1 から n_2 に遷移して波長 λ の光を放出したとすると

$$h \frac{c}{\lambda} = E_{n_1} - E_{n_2}$$

なので

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8h^3 c \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

となる。したがって、リュードベリ定数は

$$R = \frac{me^4}{8h^3 c \epsilon_0^2}$$

となる。