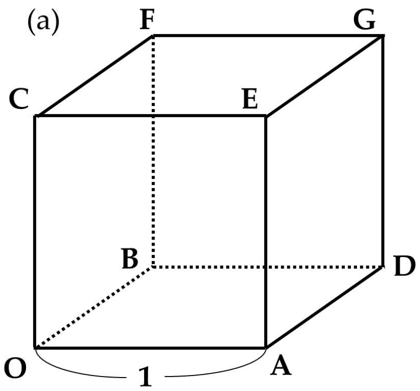
物理学演習II　第5回　磁場中の荷電粒子　2015年10月30日　担当：佐藤 純

問題1 [ベクトルの外積]

下図 (a) の立方体において，以下の外積ベクトルを $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．



(1-1) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\times\overrightarrow{\mathrm{DA}}$　**(1-2)** $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　**(1-3)** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\times\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　**(1-4)** $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\times\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　**(1-5)** $\overrightarrow{\mathrm{CG}}\times\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

解説
ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は，

(a) 向き：$\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直で，$\vec{a}, \vec{b}$ の向きに右ねじの方向
(b) 大きさ：$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=$ 平行四辺形の面積

のベクトルである．
解答

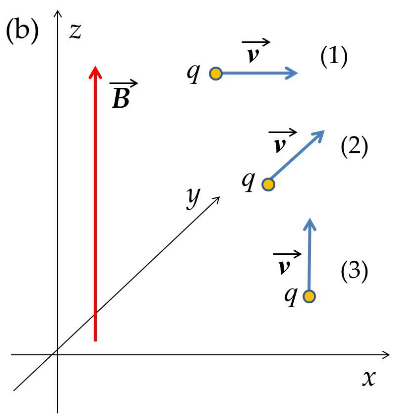
(1-1) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\times\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{c}$　**(1-2)** $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\vec{b}$　**(1-3)** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\times\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}$

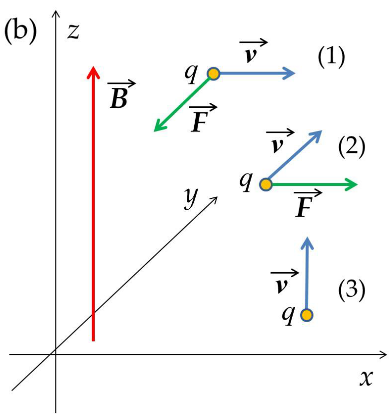
(1-4) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\times\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}$　**(1-5)** $\overrightarrow{\mathrm{CG}}\times\overrightarrow{\mathrm{CE}}=-\vec{c}$

問題2 [ローレンツ力]

下図 (b) のように，z 軸方向の一様な磁束密度 $\vec{B}=(0,0,B_z)$ の中を電荷 q が速度 $\vec{v}$ で運動しているとき，電荷が受ける力 $\vec{F}$ を求め，図中に描きこめ．

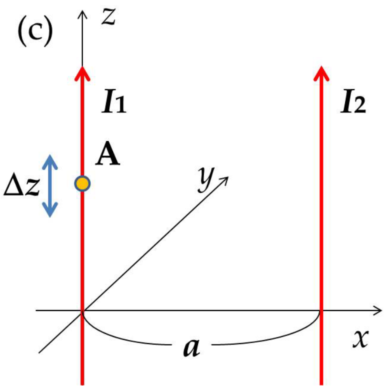
(2-1) $\vec{v}=(v_x,0,0)$　**(2-2)** $\vec{v}=(0,v_y,0)$　**(2-3)** $\vec{v}=(0,0,v_z)$

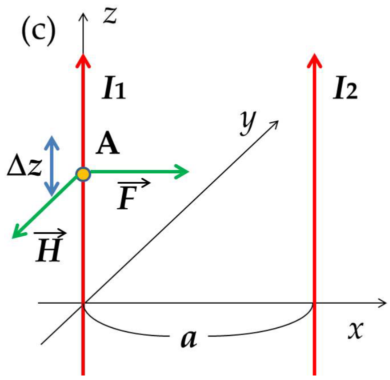




問題 3 ［平行電流に働く力］

下図 (c) のように，原点を通り z 軸正方向に電流 I_1 が，$(a, 0, 0)$ を通り z 軸正方向に電流 I_2 が流れている．





(3-1) 電流 I_2 が点 A に作る磁場 $\overrightarrow{H}$ を求め，図中に描きこめ．

磁場の大きさは $H = \dfrac{I_2}{2\pi a}$ であり，その方向は右ねじの法則により y 軸負の方向であるので，$\boxed{\overrightarrow{H} = \left(0, -\dfrac{I_2}{2\pi a}, 0\right)}$ である．

(3-2) 電流 I_1 の導線の電荷密度（単位長さの導線中にある電荷の量）を λ とするとき，図中の Δz の部分にある電荷量 q を求めよ．

$\boxed{q = \lambda \Delta z}$

(3-3) 電流 I_1 中の電荷の速度を v とするとき，電流 I_1 を λ, v で表せ．

微小時間 Δt の間に導線の断面を通過する電荷量は前問の結果より，$\Delta q = \lambda(v\Delta t)$ なので，電流は $\boxed{I_1} = \Delta q/\Delta t = \boxed{\lambda v}$ となる．

(3-4) 問題 (3-2) で求めた電荷 q が，電流 I_2 が作る磁場から受ける力 $\overrightarrow{F}$ を求め，図中に描きこめ．

速度 $\vec{v} = (0, 0, v)$ で運動する電荷 $q = \lambda\Delta z$ が磁束密度 $\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{H} = \left(0, -\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi a}, 0\right)$ から受けるローレンツ力 $\overrightarrow{F}$ は，

$$\overrightarrow{F} = q\vec{v} \times \overrightarrow{B} = (\lambda\Delta z)(0, 0, v) \times \left(0, -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}, 0\right) = (\lambda\Delta z)\left(v\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}, 0, 0\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\Delta z(1, 0, 0)$$

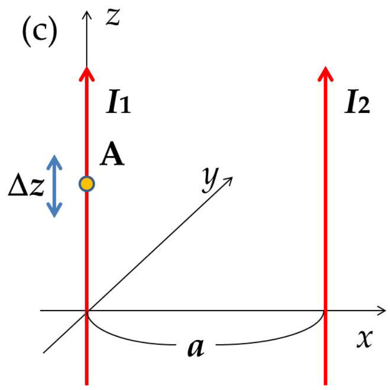
なので，x 軸正の方向で，その大きさは $\boxed{F = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\Delta z}$ である．

(3-5) 同方向に流れる平行電流の間に働く力は，引力か，斥力か？

$\boxed{\text{引力}}$

問題 4 $\star$ [ビオサバールの法則，直線電流が作る磁場]

下図 (c) において，(無限に長い) 直線電流 I_1 が作る磁場を計算する．



(4-1) 点 $(a,0,0)$ にある磁荷 q_m が点 $(0,0,z)$ に作る磁場 $\overrightarrow{H}_0$ を求めよ．

磁荷の位置 $(a,0,0)$ から点 $(0,0,z)$ へのベクトル $\vec{r}$ は $\vec{r}=(0,0,z)-(a,0,0)=(-a,0,z)$ であるので，

$$\overrightarrow{H}_0=\frac{q_m}{4\pi\mu_0}\frac{\vec{r}}{r^3}=\boxed{\frac{q_m}{4\pi\mu_0}\frac{(-a,0,z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}}$$

(4-2) この磁場により，電流 I_1 の z と $z+\Delta z$ の間にある電荷が受けるローレンツ力 $\overrightarrow{F}$ を求めよ．

問題 (3-2) と同様に導線の電荷密度を λ とすると，$q=\lambda\Delta z$，$I_1=\lambda v$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}&=q\vec{v}\times\overrightarrow{B}=q\vec{v}\times\mu_0\overrightarrow{H}\\&=(\lambda\Delta z)(0,0,v)\times\frac{q_m}{4\pi}\frac{(-a,0,z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}\\&=\frac{q_m\lambda\Delta z}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}(0,0,v)\times(-a,0,z)\\&=\frac{q_m\lambda\Delta z}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}(0,-av,0)\\&=\boxed{\frac{aq_mI_1\Delta z}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}(0,-1,0)}\end{aligned}$$

(4-3) 作用反作用の法則により，電流 I_1 の z と $z+\Delta z$ の間にある部分が点 $(a,0,0)$ に作る磁場 $\Delta\overrightarrow{H}$ を求めよ．

$$\Delta\overrightarrow{H}=-\overrightarrow{F}/q_m=\boxed{\frac{aI_1\Delta z}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}(0,1,0)}$$

(4-4) 上の結果を積分することにより，電流 I_1 が点 $(a,0,0)$ に作る磁場 $\overrightarrow{H}$ を求め，図示せよ．

$$\overrightarrow{H}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{aI_1\mathrm{d}z}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}(0,1,0)=\frac{aI_1}{4\pi}(0,1,0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$z=a\tan\theta$ とすると，$\begin{array}{c|ccc} z & -\infty & \to & \infty \\ \hline \theta & -\pi/2 & \to & \pi/2 \end{array}$，

$a^2+z^2=a^2(1+\tan^2\theta)=\dfrac{a^2}{\cos^2\theta}$，$\quad \mathrm{d}z=\dfrac{a\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$ より，

$$\overrightarrow{H}=\frac{aI_1}{4\pi}(0,1,0)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\frac{a^3}{\cos^3\theta}}\frac{a\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}=\frac{I_1}{4\pi a}(0,1,0)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{I_1}{4\pi a}(0,1,0)\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \boxed{\frac{I_1}{2\pi a}(0,1,0)}$$

(4-5) 同様に，電流 I_1 が点 $(0,a,0)$, $(-a,0,0)$, $(0,-a,0)$ に作る磁場を求め，図示せよ．

全く同様の計算で， $\boxed{\frac{I_1}{2\pi a}(-1,0,0)}$ $\boxed{\frac{I_1}{2\pi a}(0,-1,0)}$ $\boxed{\frac{I_1}{2\pi a}(1,0,0)}$ を得る．