物理学演習II　第2回　電場，電位

2015 年 10 月 2 日　担当：佐藤 純

問題 1 3 次元 xyz 空間の原点に電荷 q がある．

(1-1) 点 A の位置ベクトルを $\vec{r}_{\mathrm{A}}$，その大きさを r_{A} とする $(r_{\mathrm{A}} = |\vec{r}_{\mathrm{A}}|)$．
点 A に電荷 q_{A} があるとき，この電荷に働く力 $\overrightarrow{F}_{\mathrm{A}}$ を $\vec{r}_{\mathrm{A}}, r_{\mathrm{A}}$ を使って表せ．

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{A}} = \frac{q q_{\mathrm{A}}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}^3}}$$

(1-2) 原点の電荷 q が $\vec{r}$ の位置に電場

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

を発生していると考える．上で求めた力 $\overrightarrow{F}_{\mathrm{A}}$ を電場 $\overrightarrow{E}(\vec{r})$ を使って表せ．

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{A}} = q_{\mathrm{A}}\overrightarrow{E}(\vec{r}_{\mathrm{A}})}$$

(1-3) 点 B の位置ベクトルを $\vec{r}_{\mathrm{B}}$，その大きさを r_{B} とする $(r_{\mathrm{B}} = |\vec{r}_{\mathrm{B}}|)$．
点 B に電荷 q_{B} があるとき，この電荷に働く力 $\overrightarrow{F}_{\mathrm{B}}$ を電場 $\overrightarrow{E}(\vec{r})$ を使って表せ．

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\mathrm{B}} = q_{\mathrm{B}}\overrightarrow{E}(\vec{r}_{\mathrm{B}})}$$

問題 2 地上に質量 m のボールが置いてある．鉛直上向きに z 軸を取る．

(2-1) ボールを高さ $z = h$ の地点まで持ち上げるのに必要な仕事量 W を求めよ．

仕事 W[J]=力 [N]× 距離 [m] である．ボールには重力 $-mg$ が働いているので，それを支えるのに mg の力が必要である．一定の力 mg で h だけボールを動かすので，必要な仕事量は

$$\boxed{W = mgh}$$

である．

(2-2) 高さ z におけるこのボールの位置エネルギーは $U(z) = mgz$ で与えられる．
このとき，関係式 $W = U(h) - U(0)$ を確認せよ．

$$U(h) - U(0) = mgh - mg \times 0 = mgh = W$$

(2-3) 高さ z においてボールが受ける力 $F(z)$ は，$F(z) = -U'(z)$ で与えられることを確認せよ．

ポテンシャルエネルギーを空間微分してマイナスとつけると力になる：

$$-U'(z) = -(mgz)' = -mg = F(z)$$

問題 3 摩擦のない床にバネ定数 k のバネがあり，左端は固定，右端には質量 m のおもりが付けられている．バネ左端から右端に向かって x 軸を取り，バネが自然長の位置を $x=0$ とする．

(3-1) バネを a だけ伸ばすのに必要な仕事量 W を求めよ．

バネの伸びが x のときにバネが引っ張る力は $-kx$ なので，おもりを支えるために $+kx$ の力が必要である．
バネ伸びを $x \to x+\Delta x$ とするのに必要な仕事 ΔW は，$\Delta W = kx\Delta x$ である．これを全て足し合わせて，

$$W = \sum \Delta W = \sum kx\Delta x \to \int_0^a kx\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^a = \boxed{\frac{1}{2}ka^2}$$

(3-2) バネが x だけ伸びているとき持っている弾性エネルギーは $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ で与えられる．このとき，関係式 $W = U(a) - U(0)$ を確認せよ．

$$U(a) - U(0) = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}k \times 0^2 = \frac{1}{2}ka^2 = W$$

(3-3) おもりが位置 x においてバネから受ける力は $F(x) = -U'(x)$ で与えられることを確認せよ．

ポテンシャルエネルギーを空間微分してマイナスとつけると力になる：

$$-U'(x) = -\left(\frac{1}{2}kx^2\right)' = -kx = F(x)$$

問題 4 x 軸原点に電荷 q がある．

(4-1) 位置 $x=a$ に単位電荷 1[C] があるとき，この単位電荷が受ける力 $E_x(a)$ を求めよ．

$$\boxed{E_x(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}}$$

(4-2) この単位電荷を $x=b$ まで運ぶのに必要な仕事 W を求めよ．

単位電荷が x にあるときに原点の電荷 q から受ける力は $E_x(x)$ なので，単位電荷を支えるために $-E_x(x)$ の力が必要である．
単位電荷を位置 x から $x+\Delta x$ まで運ぶのに必要な仕事 ΔW は，$\Delta W = -E_x(x)\Delta x$ である．これを全て足し合わせて，

$$\begin{aligned} W &= \sum \Delta W = -\sum E_x(x)\Delta x \\ &\to -\int_a^b E_x(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}\right]_a^b = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}} \end{aligned}$$

(4-3) 位置 x における電位を

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

とする．このとき，関係式 $W = \phi(b) - \phi(a)$ を確認せよ．

$$\phi(b) - \phi(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = W$$

(4-4) 位置 x において単位電荷が受ける力は

$$E_x(x) = -\phi'(x)$$

で与えられることを確認せよ.

電位を空間微分してマイナスとつけると電場になる：

$$-\phi'(x) = -\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}\right)' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = E_x(x)$$

(4-5) 3 次元の場合には，原点からの距離 r における電位は

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる．位置ベクトル $\vec{r}$ にある単位電荷が受ける力 (=電場) は

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

と書けることを示せ.

まず $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2+y^2+z^2)' \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) \\
&= -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{x}{r^3}
\end{aligned}$$

同様に，$\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{y}{r^3}$，　$\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{z}{r^3}$ となるので，

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}(x, y, z) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} \\
&= \overrightarrow{E}(\vec{r})
\end{aligned}$$

を得る.