

問題1 以下のベクトル  $\vec{a}$  の大きさと、その方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

(1-1)  $\vec{a} = (3, 4)$

ベクトルの大きさは、 $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

単位ベクトルは、元のベクトルを大きさに割って、 $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}| = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(1-2)  $\vec{a} = (1, -2, 2)$

ベクトルの大きさは、 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$

単位ベクトルは、元のベクトルを大きさに割って、 $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}| = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

問題2 3次元空間に3点 A:(1, -1, 2), B:(0, 2, -1), C:(-1, 0, 1) がある。

(2-1) ベクトル  $\vec{AB}$  を求めよ。  $\vec{AB} = (0, 2, -1) - (1, -1, 2) = (-1, 3, -3)$

(2-2) ベクトル  $\vec{AB}$  の大きさを求めよ。  $|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$

(2-3) A→B の方向を向いた単位ベクトルを求めよ。  $\vec{e}_{AB} = \vec{AB}/|\vec{AB}| = \frac{1}{\sqrt{19}}(-1, 3, -3)$

(2-4) B→C の方向を向いた単位ベクトルを求めよ。

$\vec{BC} = (-1, 0, 1) - (0, 2, -1) = (-1, -2, 2)$ ,  $|\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ .

$\vec{e}_{BC} = \vec{BC}/|\vec{BC}| = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)$

(2-5) 大きさが3で、A→B の方向を向いたベクトルを求めよ。  $3\vec{e}_{AB} = \frac{3}{\sqrt{19}}(-1, 3, -3)$

(2-6) 大きさが6で、C→B の方向を向いたベクトルを求めよ。  $-6\vec{e}_{BC} = (2, 4, -4)$

問題3 3次元空間の点 P = (x, y, z) の位置ベクトルを  $\vec{r}$ 、原点からの距離を r とする。

(3-1) r を x, y, z を用いて表せ。  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(3-2) 位置ベクトル  $\vec{r}$  の方向を向いた単位ベクトル  $\vec{e}$  を、r,  $\vec{r}$  を用いて表せ。

単位ベクトルを作るには、大きさに割ってやればよいから、 $\vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}$

(3-3) 点 P から原点に向かい、大きさが f のベクトル  $\vec{F}$  を求めよ。

点 P から原点に向かう方向の単位ベクトルは  $-\vec{e}$  である。

この方向で大きさが f であるから、 $\vec{F} = f(-\vec{e}) = -f\frac{\vec{r}}{r}$

問題 4 距離  $r$  だけ離れた 2 つの電荷  $q_1$  と  $q_2$  の間にはクーロン力  $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  が働く。

(4-1) 電荷の単位をクーロンとし, [C] で表す。比例定数  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  の次元を [N], [m], [C] で表せ。

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Fr^2}{q_1 q_2} = \boxed{[\text{Nm}^2\text{C}^{-2}]}$$

(4-2) この単位系において真空の誘電率  $\epsilon_0$  は真空中の光速  $c$  を使って  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$  と書ける。

比例定数  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  の値を求めよ。ただし, 真空の光速はおよそ 30 万 km/秒である。

30 万 km/秒 =  $3 \times 10^8$  [m/s] であるから,

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} = \boxed{9 \times 10^9 [\text{Nm}^2\text{C}^{-2}]}$$

問題 5 以下の力を単位を [N] として求めよ。(有効数字 1 桁程度の大雑把な計算でよい。電卓不可)

(5-1) 体重 50kg の人が 2 人, 1m 離れて立っているときに 2 人の間に働く万有引力を求めよ。ただし, 万有引力定数を  $G = 7 \times 10^{-11} [\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}]$  とする。

$$F = G \frac{m^2}{r^2} = 7 \times 10^{-11} \frac{50^2}{1^2} [\text{N}] = \boxed{1 \times 10^{-7} [\text{N}]}$$

(5-2) 1[C] の電荷が 2 つ, 1m 離れて存在しているとき, これらの間に働くクーロン力を求めよ。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{1^2}{1^2} [\text{N}] = \boxed{9 \times 10^9 [\text{N}]}$$

問題 6 3 次元空間に 2 点 A:(-1, 0, 1), B:(0, 2, -1) がある。xyz 座標の単位は [m] とする。

(6-1) 点 A に +2[C], 点 B に +1[C] があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ。

$$\vec{AB} = (-1, 0, 1) - (0, 2, -1) = (-1, -2, 2), \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{3}(-1, -2, 2).$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\vec{AB}|^2} = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 1}{3^2} [\text{N}] = 2 \times 10^9 [\text{N}] \text{ より,}$$

$$\vec{F} = |\vec{F}| \vec{e}_{AB} [\text{N}] = \boxed{(-7 \times 10^8, -1 \times 10^9, 1 \times 10^9) [\text{N}]}$$

(6-2) 点 A に +2[C], 点 B に -1[C] があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ。

$$\vec{F} = \boxed{(7 \times 10^8, 1 \times 10^9, -1 \times 10^9) [\text{N}]}$$

(6-3) 点 A に -2[C], 点 B に +1[C] があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ。

$$\vec{F} = \boxed{(7 \times 10^8, 1 \times 10^9, -1 \times 10^9) [\text{N}]}$$

(6-4) 点 A に -2[C], 点 B に -1[C] があるとき, A の電荷が B の電荷に及ぼす力  $\vec{F}$  を求めよ。

$$\vec{F} = \boxed{(-7 \times 10^8, -1 \times 10^9, 1 \times 10^9) [\text{N}]}$$

(6-5) 力  $\vec{F}$  の大きさ  $f$  を求めよ。

$$f = |\vec{F}| = \boxed{2 \times 10^9 [\text{N}]}$$