数学II　中間試験　(1/2)

2015年11月24日　担当：佐藤 純

問題1 ⋆ (2点 ×18=36点)

以下の不定積分，定積分を計算せよ．(答えだけでよい)

(1-1) $\displaystyle\int x^3 \mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{4}x^4 + C}$

(1-2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{x} + C}$

(1-3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \boxed{\log x + C}$

(1-4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C}$

(1-5) $\displaystyle\int \sin x \mathrm{d}x = \boxed{-\cos x + C}$

(1-6) $\displaystyle\int \cos x \mathrm{d}x = \boxed{\sin x + C}$

(1-7) $\displaystyle\int e^x \mathrm{d}x = \boxed{e^x + C}$

(1-8) $\displaystyle\int e^{3x} \mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{3}e^x + C}$

(1-9) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \boxed{\frac{7}{3}}$

(1-10) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + 1 = 0 + 1 = \boxed{1}$

(1-11) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = \boxed{2}$

(1-12) $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = \boxed{e - 1}$

(1-13) $\displaystyle\int \log x\,\mathrm{d}x = \int (x)' \log x\,\mathrm{d}x = x\log x - \int x(\log x)'\,\mathrm{d}x = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\log x - \int \mathrm{d}x$
$= \boxed{x\log x - x + C}$

(1-14) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \boxed{-\log\cos x + C}$

(1-15) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^3-1)'}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \boxed{\log(x^3 - 1) + C}$

(1-16) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\sqrt{x^2+1} + C}$

(1-17) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x} = \int \frac{(\log x)'}{\log x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\log\log x + C}$

(1-18) $\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x = \int e^{x\log 2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log 2}e^{x\log 2} + C = \boxed{\frac{1}{\log 2}2^x + C}$

問題2 ⋆⋆ (3点 ×6=18点)

以下の不定積分，定積分を計算せよ．

(2-1) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x(\sin x)'\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int (x)'\sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x \mathrm{d}x$
$= \boxed{x\sin x + \cos x + C}$

(2-2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{4}\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + C}$

(2-3) $\displaystyle\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' \mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x \mathrm{d}x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x = e^x(\cos x + \sin x) - I \end{aligned}$$

より，$I = e^x(\cos x + \sin x) - I$ を I について解いて，

$$I = \boxed{\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C}$$

を得る．

(2-4)

$$\int_0^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} (-e^{-x}) - (-e^0) = 0 + 1 = \boxed{1}$$

(2-5)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x^2} \, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right) (-2x) e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}\right) (-x^2)' e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left[e^{-x^2}\right]_0^\infty = \left(-\frac{1}{2}\right) (0 - 1) = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(2-6)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty x (-e^{-x})' \, \mathrm{d}x \\ &= \left[x(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty (x)' (-e^{-x}) \, \mathrm{d}x \\ &= -\left[x e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\left[x e^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \\ &\lim_{x\to\infty} x e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \\ &\lim_{x\to 0} x e^{-x} = 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

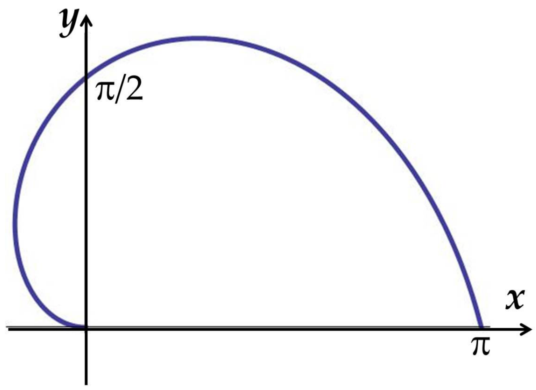
より，

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x} \, \mathrm{d}x &= -\left[x e^{-x}\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\right]_0^\infty \\ &= (0 - 0) - (0 - 1) = \boxed{1} \end{aligned}$$

問題 3 ⋆⋆⋆ (4 点 ×2=8 点)

極方程式 $r = \pi - \theta\,(0 \leq \theta \leq \pi)$ で表される曲線を考える．

(3-1) この曲線を，xy 平面内に図示せよ．曲線が座標軸と交わる点にはその座標も書くこと．



(3-2) この曲線と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

$$S = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - \theta)^2 \mathrm{d}\theta = \left[-\frac{1}{6}(\pi - \theta)^3\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{1}{6}\pi^3}$$

問題 4 ⋆⋆ (4 点 ×2=8 点)

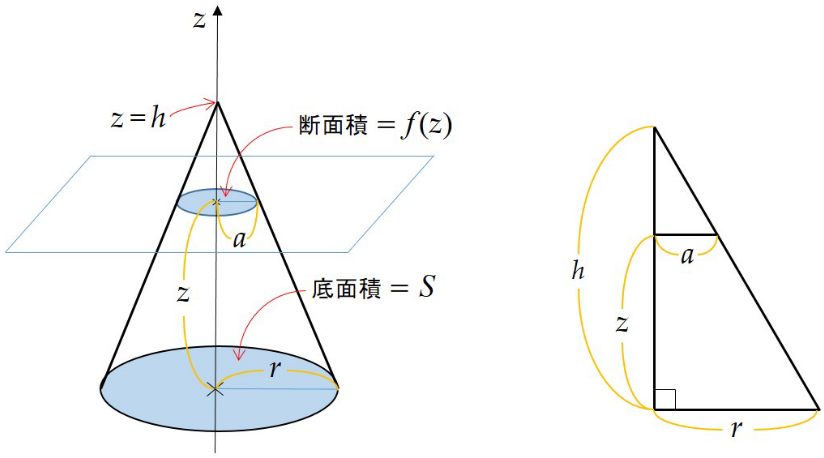
(4-1) サイクロイド曲線

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r > 0)$$

の全長 L を求めよ．

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \\ &= r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{1 - \cos\theta} \\ &= \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 2r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sin\frac{\theta}{2} \\ &= 4r\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \boxed{8r} \end{aligned}$$

(4-2) 底面積 S, 高さ h の円錐の体積 V を積分計算によって求めよ．(答えのみは不可)



左図のように，円錐を高さ z の水平な平面で切り，その断面積を $f(z)$ とする．底面の円の半径を r とすると，底面積は S なので $S=\pi r^2$ である．
右図を見て分かるように，三角形の相似から，$h:r=(h-z):a$ より，$ha=r(h-z)$ なので，$a=\frac{r}{h}(h-z)$ となる．したがって断面積は

$$f(z)=\pi a^2=\frac{\pi r^2}{h^2}(h-z)^2=\frac{S}{h^2}(h-z)^2$$

で与えられるので，体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \mathrm{d}z f(z) \\ &= \frac{S}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}z(h-z)^2 \\ &= \frac{S}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-z)^3\right]_0^h \\ &= \boxed{\frac{hS}{3}} \end{aligned}$$

となる．

問題 5 ⋆⋆ (3 点 ×2=6 点)

(5-1) 微分方程式 $y'=2x(2-y)$ の一般解を求めよ．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(2-y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{2-y}=2x\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\mathrm{d}y}{2-y}=\int 2x\mathrm{d}x,\quad -\log(2-y)=x^2+A,$$
$$2-y=e^{-x^2-A}=e^{-A}e^{-x^2}.$$

ここで，$B=-e^{-A}$ とおくと，$\boxed{y=2+Be^{-x^2}}$

(5-2) 微分方程式 $y'-3y=e^{2x}$ の一般解を求めよ．
右辺をゼロにおいた，$y'-3y=0$ をまず解く．これは変数分離形なので，

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y, \\ &\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3\mathrm{d}x, \\ &\log y=3x+C, \end{aligned}$$

$$y = Ae^{3x}$$

と解ける．ここで，A は積分定数であるが，x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)，もとの微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&A'e^{3x} + 3Ae^{3x} - 3Ae^{3x} = e^{2x},\\
&A' = e^{-x}
\end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる．これを積分して

$$A = -e^{-x} + C$$

と A が求まる．これを $y = Ae^{3x}$ に代入して，$\boxed{y = Ce^{3x} - e^{2x}}$ を得る．

問題 6 $\star\star$ (4 点 ×2=8 点)

(6-1) 置換 $t = x + \sqrt{x^2+2}$ を用いて，不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ を計算せよ．

置換 $t = x + \sqrt{x^2+2}$ を用いて，

$$\begin{aligned}
&t - x = \sqrt{x^2+2},\\
&(t-x)^2 = x^2 + 2,\\
&t^2 - 2tx = 2,\\
&x = \frac{t^2-2}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{2}{t}\right),\\
&\sqrt{x^2+2} = t - x = t - \frac{1}{2}\left(t - \frac{2}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right),\\
&\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{2}{t}\right)'\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2t}\left(t + \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right)\frac{1}{2t}\left(t + \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{8}t^2 + \log t - \frac{1}{2t^2} + C\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left(t - \frac{2}{t}\right) \times \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right) + \log t + C\\
&= \boxed{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2} + \log(x + \sqrt{x^2+2}) + C}
\end{aligned}$$

となる．

(6-2) 置換 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を用いて，不定積分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + 5\cos x}$ を計算せよ．

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

より，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{4+5\cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{4+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2\mathrm{d}t}{4(1+t^2)+5(1-t^2)} \\
&= \int \frac{2\mathrm{d}t}{9-t^2} \\
&= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{3+t}+\frac{1}{3-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\log\left(\frac{3+t}{3-t}\right)+C \\
&= \boxed{\frac{1}{3}\log\left(\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right)+C}
\end{aligned}
$$

問題 7 ⋆⋆ (4 点+3 点=7 点)

反応速度定数 k の化学反応 $A+B\to C$ を考える．時刻 $t=0$ での A, B の濃度を N とし，C の濃度を 0 とすると，時刻 t における C の濃度 $x(t)$ が満たす微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(N-x)^2$$

となる．

(7-1) 上の微分方程式を解くことにより $x(t)$ を求めよ．

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(N-x)^2}=\int k\mathrm{d}t, \quad \frac{1}{N-x}=kt+A$$

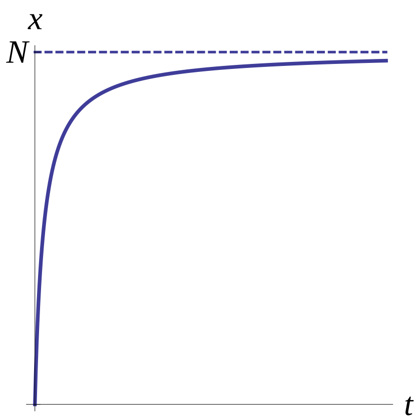
$y=N-x$ とおくと，$\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$ より，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(N-x)^2}=\int\frac{-\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{1}{y}=\frac{1}{N-x}$$

ここで，初期条件 $x(0)=0$ より，$A=1/N$ なので，

$$\frac{1}{N-x}=kt+\frac{1}{N}, \quad \boxed{x(t)=N\left(1-\frac{1}{Nkt+1}\right)}$$

(7-2) 上で求めた $x(t)$ のグラフを描き，その意味を簡潔に記せ．



最初は一気に反応が進むが，だんだん緩慢になり，やがて濃度は N に飽和する．

問題 8 ⋆⋆⋆⋆ (3 点 ×3=9 点)

(8-1) 自然数 $m,\, n$ に対し，

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\log x)^n \mathrm{d}x$$

とするとき，漸化式

$$I_{m,n} = -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$$

を示せ．ただし，$\lim_{x \to +0} x^\alpha (\log x)^\beta = 0$ $(\alpha, \beta > 0)$ を証明なしに用いてよい．

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_0^1 x^m (\log x)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{m+1} x^{m+1}\right)' (\log x)^n \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} (\log x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1} \left\{(\log x)^n\right\}' \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1} n (\log x)^{n-1} \times \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\log x)^{n-1} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1}
\end{aligned}$$

(8-2) 上の漸化式から，$I_{m,n}$ を決定せよ．

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1} \\
&= (-1)^2 \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} I_{m,n-2} \\
&= (-1)^3 \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} I_{m,n-3} \\
&= \cdots = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_{m,0}
\end{aligned}$$

ここで，

$$I_{m,0} = \int_0^1 x^m \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+1}$$

より，

$$\boxed{I_{m,n} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}}$$

(8-3) この結果と，e^x のマクローリン展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots$ を用いて，以下の積分を級数で表す式（ヨハン・ベルヌーイ (1697 年)）

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \cdots$$

を示せ.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^x \mathrm{d}x &= \int_0^1 e^{x\log x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x\log x)^n\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\log x)^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_{n,n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \cdots
\end{aligned}
$$