数学II　中間試験　(1/2)

2015年11月24日　　担当：佐藤 純

問題 1 $\star$ (2点 ×18=36点)

以下の不定積分，定積分を計算せよ．(答えだけでよい)

(1-1) $\displaystyle\int x^3 \mathrm{d}x$　**(1-2)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$　**(1-3)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$　**(1-4)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(1-5) $\displaystyle\int \sin x \mathrm{d}x$　**(1-6)** $\displaystyle\int \cos x \mathrm{d}x$　**(1-7)** $\displaystyle\int e^x \mathrm{d}x$　**(1-8)** $\displaystyle\int e^{3x} \mathrm{d}x$

(1-9) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x$　**(1-10)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$　**(1-11)** $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x$　**(1-12)** $\displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$

(1-13) $\displaystyle\int \log x\,\mathrm{d}x$　**(1-14)** $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$　**(1-15)** $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(1-16) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$　**(1-17)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x}$　**(1-18)** $\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x$

問題 2 $\star\star$ (3点 ×6=18点)

以下の不定積分，定積分を計算せよ．

(2-1) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$　**(2-2)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$　**(2-3)** $\displaystyle\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$

(2-4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$　**(2-5)** $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$　**(2-6)** $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

問題 3 $\star\star\star$ (4点 ×2=8点)

極方程式 $r = \pi - \theta\,(0 \le \theta \le \pi)$ で表される曲線を考える．

(3-1) この曲線を，xy 平面内に図示せよ．曲線が座標軸と交わる点にはその座標も書くこと．

(3-2) この曲線と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

問題 4 $\star\star$ (4点 ×2=8点)

(4-1) サイクロイド曲線

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1-\cos\theta) \end{cases} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ r > 0)$$

の全長 L を求めよ．

(4-2) 底面積 S, 高さ h の円錐の体積 V を積分計算によって求めよ．(答えのみは不可)

問題 5 $\star\star$ (3点 ×2=6点)

(5-1) 微分方程式 $y' = 2x(2-y)$ の一般解を求めよ．

(5-2) 微分方程式 $y' - 3y = e^{2x}$ の一般解を求めよ．

問題6 ⋆⋆ (4点 ×2=8点)

(6-1) 置換 $t = x + \sqrt{x^2+2}$ を用いて，不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ を計算せよ．

(6-2) 置換 $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を用いて，不定積分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+5\cos x}$ を計算せよ．

問題7 ⋆⋆ (4点+3点=7点)

反応速度定数 k の化学反応 $A+B \to C$ を考える．時刻 $t=0$ での A, B の濃度を N とし, C の濃度を 0 とすると，時刻 t における C の濃度 $x(t)$ が満たす微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(N-x)^2$$

となる．

(7-1) 上の微分方程式を解くことにより $x(t)$ を求めよ．

(7-2) 上で求めた $x(t)$ のグラフを描き，その意味を簡潔に記せ．

問題8 ⋆⋆⋆⋆ (3点 ×3=9点)

(8-1) 自然数 m, n に対し，

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\log x)^n \mathrm{d}x$$

とするとき，漸化式

$$I_{m,n} = -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$$

を示せ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^\alpha (\log x)^\beta = 0$ $(\alpha, \beta > 0)$ を証明なしに用いてよい．

(8-2) 上の漸化式から，$I_{m,n}$ を決定せよ．

(8-3) この結果と，e^x のマクローリン展開 $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$ を用いて，以下の積分を級数で表す式（ヨハン・ベルヌーイ (1697年)）

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \cdots$$

を示せ．