

問題1 スカラー場 f とベクトル場 \vec{g} が,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\vec{g}(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$$

で与えられているとき, 以下の量を計算せよ.

(1-1) $\vec{\nabla} f$ (1-2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$ (1-3) $\vec{\nabla} \times \vec{g}$ (1-4) Δf

問題2 位置ベクトルを

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と書くとき, 以下の量を計算せよ.

(2-1) $\vec{\nabla} r$ (2-2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ (2-3) $\vec{\nabla} \times \vec{r}$

(2-4) $\vec{\nabla} \frac{1}{r}$ (2-5) $\Delta \frac{1}{r}$

問題3 原点 $(0, 0, 0)$ に電荷 q があるときの電位は

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である.

(3-1) 電場

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

を計算せよ.

(3-2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ を示せ.

(3-3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ を示せ.

問題4 以下の式を示せ

(4-1) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$

(4-2) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$

(4-3) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \Delta \vec{f}$