数学II　第11回　偏微分と全微分

2015年12月15日　担当：佐藤 純

問題1 2変数 (x, y) の関数 $f(x, y)$ が以下の式で与えられているとき，1次偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ および全微分 $\mathrm{d}f$ を計算せよ．

(1-1) $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^3$　**(1-2)** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$　**(1-3)** $f(x, y) = e^{xy}$

(1-4) $f(x, y) = x \sin y$　**(1-5)** $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$　**(1-6)** $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

問題2 2変数 (x, y) の関数 $f(x, y)$ が以下の式で与えられているとき，2次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を全て計算し，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ が成り立つことを確かめよ．

(2-1) $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^3$　**(2-2)** $f(x, y) = e^{xy}$

問題3 2次元 xy 座標 (x, y) と2次元極座標 (r, θ) の関係式は,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

で与えられる．t を時刻とする物体の2次元運動を考える．

(3-1) r, θ を x, y の式で表せ.

(3-2) 物体の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$ を $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を用いて表せ.

(3-3) 角速度 ω の等速円運動のとき，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0, \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$ となる．このとき,

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = r\omega$$

となることを示せ.

(3-4) 物体がポテンシャルエネルギー $U(x, y)$ の中を運動するとき，物体に働く力は

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

である．このとき,

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = -r\frac{\partial U}{\partial r}$$

が成り立つことを示せ．ただし，位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y)$ と書いた.

(3-5) この力 $\vec{F}$ に逆らって物体を $\vec{r}$ から $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$ まで運ぶのに必要な仕事はポテンシャルの増分 $\mathrm{d}U$ に等しいことを示せ．ただし，$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, $\mathrm{d}U = U(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - U(x, y)$ である.