数学 II　第 10 回　微分方程式の応用

2015 年 12 月 8 日　　担当：佐藤 純

問題 1 バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け，摩擦のない滑らかな机の上に置いて，他端を固定する．

(1-1) おもりの運動方程式を立てよ．
バネが自然長（伸びも縮みもないときの長さ）のときのおもりの位置を $x = 0$ とすると，バネがおもりに及ぼす力は $-kx$ と書けるので，運動方程式は

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx}$$

となる．

(1-2) 指数関数型の解 $x(t) = e^{\lambda t}$ を仮定し，λ に対する方程式を導け．
$x(t) = e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると，

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t},$$
$$\boxed{m\lambda^2 = -k}$$

と，λ に対する二次方程式が得られる．

(1-3) 上で求めた方程式から λ を決定し，一般解を求めよ．
上で求めた二次方程式を解くと，

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm \mathrm{i}\omega$$

となる．ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおいた．
これを $x(t) = e^{\lambda t}$ に代入して，二つの基本解 $x(t) = e^{\mathrm{i}\omega t}, e^{-\mathrm{i}\omega t}$ が得られる．
よって，一般解はこれらの線形結合で，

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\mathrm{i}\omega t} + Be^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + B(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t) \\ &= (A+B)\cos\omega t + \mathrm{i}(A-B)\sin\omega t \\ &= \boxed{C\cos\omega t + D\sin\omega t} \end{aligned}$$

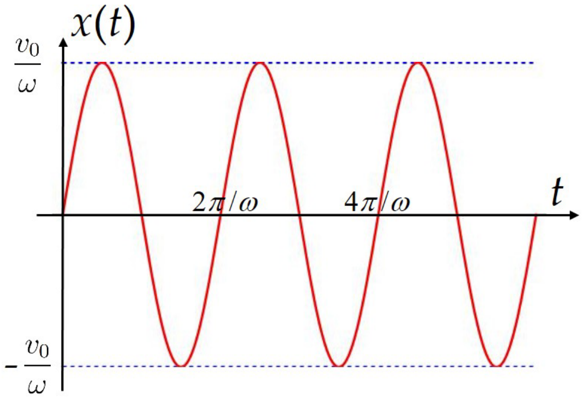
となる．ただし，$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

(1-4) バネに初速度 v_0 を与えた時，その後のおもりの運動を決定せよ．
初期条件は，$x(0) = 0$, $v(0) = v_0$ となる．よって，$0 = C\cos 0 + D\sin 0 = C$ より，$C = 0$ を得る．また，$v(t) = x'(t) = D\omega\cos\omega t$ より，$v_0 = D\omega\cos 0 = D\omega$ より，$D = \dfrac{v_0}{\omega}$ を得る．
したがって，

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

となる．

(1-5) 上の結果をグラフに表せ．



摩擦がないので減衰することなく永遠に振動を続ける．

問題 2 バネ定数 k のバネの一端に質量 m のおもりを付け，他端を固定する．おもりが机の上を動く際に，速度に比例した摩擦力が働くとし，比例定数を γ とする．

(2-1) おもりの運動方程式を立てよ．
バネが自然長（伸びも縮みもないときの長さ）のときのおもりの位置を $x=0$ とすると，バネがおもりに及ぼす力は $-kx$，おもりに働く摩擦力は $-\gamma v$ と書けるので，運動方程式は

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

となる．

(2-2) 指数関数型の解 $x(t)=e^{\lambda t}$ を仮定し，λ に対する方程式を導け．
$x(t)=e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると，

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t} - \gamma\lambda e^{\lambda t},$$
$$\boxed{m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0}$$

と，λ に対する二次方程式が得られる．

(2-3) バネに初速度 v_0 を与えた時，その後のおもりの運動を決定せよ．摩擦が十分に小さいときと大きいときで，場合分けすること．
式を綺麗にするため，$\beta = \frac{\gamma}{2m}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を導入すると，特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$$

となる．これを解くと，

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

となる．

(1) 摩擦が小さいとき ($\beta < \omega$)
このとき，$\omega^2 - \beta^2 > 0$ より，$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ とおくと，$\lambda = -\beta \pm \mathrm{i}\omega_0$ となり，一般解は

$$x(t) = Ae^{(-\beta+\mathrm{i}\omega_0)t} + Be^{(-\beta-\mathrm{i}\omega_0)t} = e^{-\beta t}(Ae^{\mathrm{i}\omega_0 t} + Be^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) = e^{-\beta t}(C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t)$$

となる．ただし，$C = A+B$, $D = \mathrm{i}(A-B)$ とおいた．

初期条件は，$x(0)=0,\ v(0)=v_0$ となる．よって，$0=x(0)=C$ を得る．また，

$$v(t)=x'(t)=e^{-\beta t}(\omega_0 D\cos\omega_0 t-\beta D\sin\omega_0 t)$$

より，

$$v_0=v(0)=\omega_0 D$$

なので，

$$C=0 \qquad D=\frac{v_0}{\omega_0}$$

を得る．
したがって，

$$\boxed{x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}e^{-\beta t}\sin\omega_0 t}$$

となる．

(2) 摩擦が大きいとき ($\beta>\omega$)
このとき，$\beta^2-\omega^2>0$ より，$\omega_0=\sqrt{\beta^2-\omega^2}$ とおくと，$\lambda=-\beta\pm\omega_0$ となり，一般解は

$$x(t)=Ae^{(-\beta+\omega_0)t}+Be^{(-\beta-\omega_0)t}=e^{-\beta t}(Ae^{\omega_0 t}+Be^{-\omega_0 t})$$

となる．
初期条件は，$x(0)=0,\ v(0)=v_0$ となる．よって，$0=x(0)=A+B$ を得る．また，

$$v(t)=x'(t)=e^{-\beta t}\{(-\beta+\omega_0)Ae^{\omega_0 t}+(-\beta-\omega_0)Be^{-\omega_0 t}\}$$

より，

$$v_0=v(0)=(-\beta+\omega_0)A+(-\beta-\omega_0)B=(-\beta+\omega_0)A+(-\beta-\omega_0)(-A)=2\omega_0 A$$

なので，

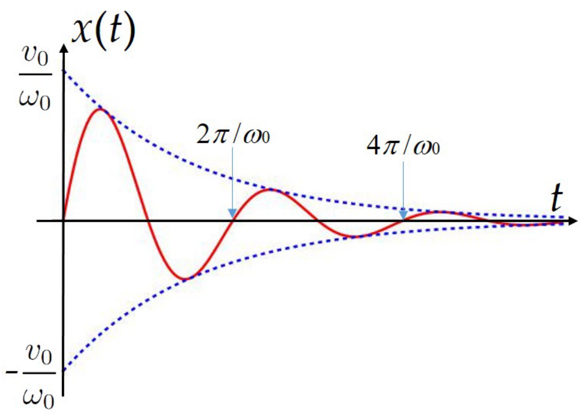
$$A=-B=\frac{v_0}{2\omega_0}$$

を得る．
したがって，

$$\boxed{x(t)=\frac{v_0}{2\omega_0}e^{-\beta t}\left(e^{\omega_0 t}-e^{-\omega_0 t}\right)}$$

となる．

(2-4) 摩擦が十分に小さいとき，上の結果をグラフに表せ．



微小な摩擦力によって減衰振動が起こる。