数学 II　第 9 回　定数係数二階線形微分方程式

2015 年 12 月 1 日　　担当：佐藤 純

問題 1 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1-1) $y'' + y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する．これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる．これを微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0, \\ &e^{\lambda x}(\lambda^2 + 1) = 0, \\ &\lambda^2 + 1 = 0, \\ &\lambda = \pm \mathrm{i} \end{aligned}$$

を得る．ここで，$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った．

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して，２つの独立解 $y = e^{\mathrm{i}x}$, $y = e^{-\mathrm{i}x}$ を得る．よって，この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{\mathrm{i}x} + Be^{-\mathrm{i}x} \quad (A, B \text{ は積分定数}) \tag{1}$$

となる．

あるいは，指数関数をオイラーの公式を使って三角関数に直すと，

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\mathrm{i}x} + Be^{-\mathrm{i}x} \\ &= A(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + B(\cos x - \mathrm{i}\sin x) \\ &= (A + B)\cos x + \mathrm{i}(A - B)\sin x \\ &= C\cos x + D\sin x \quad (C, D \text{ は積分定数}) \end{aligned} \tag{2}$$

となる．ただし，$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

上の (1) 式と (2) 式は等価であり，どちらを使ってもよいが，初期値問題を解く際には (2) 式の方が楽なことが多いので，以下の問題では断りなく (2) 式の形に書き換えることもある．

(1-2) $y'' - 9y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する．これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる．これを微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\lambda^2 e^{\lambda x} - 9e^{\lambda x} = 0, \\ &e^{\lambda x}(\lambda^2 - 9) = 0, \\ &\lambda^2 - 9 = 0, \\ &\lambda = \pm 3 \end{aligned}$$

を得る．ここで，$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った．

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して，２つの独立解 $y = e^{3x}$, $y = e^{-3x}$ を得る．よって，この微分方程式の一般解は

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x} \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

となる．

(1-3) $y'' + y' - 2y = 0$

指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定する．これを微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ となる．これを微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0, \\ &e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0, \\ &\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \\ &(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0, \\ &\lambda = 1, -2 \end{aligned}$$

を得る．ここで，$e^{\lambda x} > 0$ であることを使った．

これを $y = e^{\lambda x}$ に代入して，２つの独立解 $y = e^x$, $y = e^{-2x}$ を得る．よって，この微分方程式の一般解は

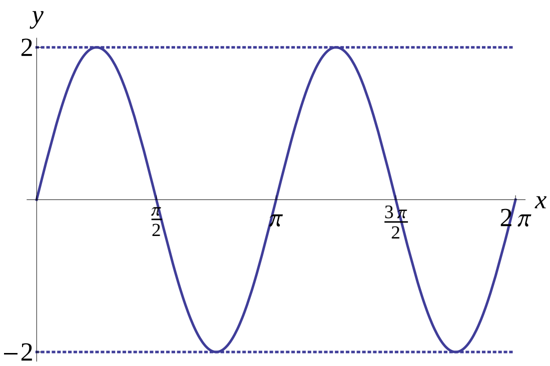
$$y = Ae^x + Be^{-2x} \quad (A, B \text{ は積分定数})$$

となる．

問題 2 以下の微分方程式を初期条件 $[x = 0$ のとき $y = 0, y' = 4\,]$ のもとに解き，グラフの概形を描け．

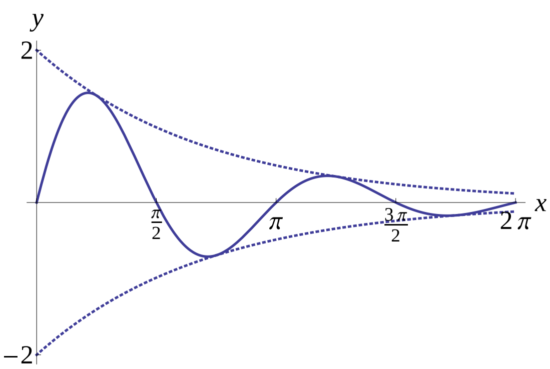
(2-1) $y'' + 4y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ の解は $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$ なので，一般解は $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ となる．これを微分すると $y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ となる．初期条件より，$0 = A$, $4 = 2B$ なので，$y = 2\sin 2x$ を得る．



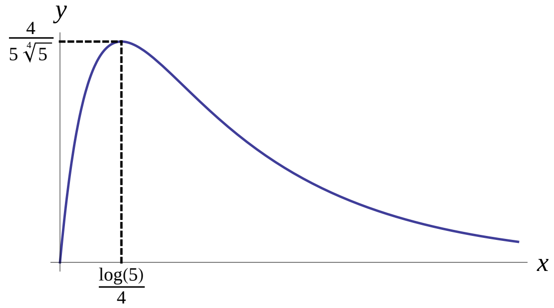
(2-2) $y'' + 6y' + 13y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$ の解は $\lambda = -3 \pm 2\mathrm{i}$ なので，一般解は $y = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ となる．これを微分すると $y' = e^{-3x}(-3A\cos 2x - 3B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$ となる．初期条件より，$0 = A$, $4 = 2B$ なので，$y = 2e^{-3x}\sin 2x$ を得る．



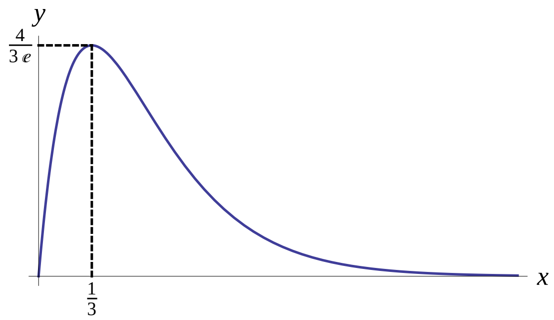
(2-3) $y'' + 6y' + 5y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ の解は $\lambda = -1, -5$ なので，一般解は $y = Ae^{-x} + Be^{-5x}$ となる．これを微分すると $y' = -Ae^{-x} - 5Be^{-5x}$ となる．初期条件より，$0 = A + B, 4 = -A - 5B$ なので，$y = e^{-x} - e^{-5x}$ を得る．



(2-4) $y'' + 6y' + 9y = 0$

特性方程式 $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ の解は $\lambda = -3$(重解) なので，一般解は $y = e^{-3x}(Ax + B)$ となる．これを微分すると $y' = e^{-3x}(-3Ax - 3B + A)$ となる．初期条件より，$0 = B$, $4 = -3B + A$ なので，$y = 4xe^{-3x}$ を得る．



問題 3 $\star$ 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(3-1) $y'' + y' - 2y = x^2 + 2$

特性方程式 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ の解は $\lambda = 1, -2$ なので，斉次方程式の一般解は $y = Ae^{x} + Be^{-2x}$ となる．

次に，特解を求める．

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

とおく．微分すると，

$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a \tag{4}$$

なので，これらを元の微分方程式に代入して，

$$\begin{aligned} &2a + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= -2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c \\ &= x^2 + 2 \end{aligned} \tag{5}$$

より，

$$-2a = 1, \quad 2a - 2b = 0, \quad 2a + b - 2c = 2 \tag{6}$$

を得る．これを解くと

$$(a, b, c) = (-1/2, -1/2, -7/4) \tag{7}$$

なので，特解は

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \tag{8}$$

となるので，求める一般解は，

$$y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \tag{9}$$

となる．

(3-2) $y'' + y' - 2y = e^{2x}$
特性方程式 $\lambda^2+\lambda-2=0$ の解は $\lambda = 1, -2$ なので，斉次方程式の一般解は $y = Ae^x+Be^{-2x}$ となる．
次に，特解を求める．

$$y = ae^{2x} \tag{10}$$

とおく．微分すると，

$$y' = 2ae^{2x}, \quad y'' = 4ae^{2x} \tag{11}$$

なので，これらを元の微分方程式に代入して，

$$\begin{aligned} 4ae^{2x} + 2ae^{2x} - 2ae^{2x} &= 4ae^{2x} \\ &= e^{2x} \end{aligned} \tag{12}$$

より，

$$a = 1/4 \tag{13}$$

なので，特解は

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} \tag{14}$$

となるので，求める一般解は，

$$y = Ae^x + Be^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \tag{15}$$

となる．

(3-3) $y'' + y' - 2y = \sin x$
特性方程式 $\lambda^2+\lambda-2=0$ の解は $\lambda = 1, -2$ なので，斉次方程式の一般解は $y = Ae^x+Be^{-2x}$ となる．
次に，特解を求める．

$$y = a\sin x + b\cos x \tag{16}$$

とおく．微分すると，

$$y' = a\cos x - b\sin x, \quad y'' = -a\sin x - b\cos x \tag{17}$$

なので，これらを元の微分方程式に代入して，

$$\begin{aligned} &(-a\sin x - b\cos x) + (a\cos x - b\sin x) - 2(a\sin x + b\cos x) \\ &= (-3a - b)\sin x + (a - 3b)\cos x \\ &= \sin x \end{aligned} \tag{18}$$

より，

$$-3a-b=1, \quad a-3b=0 \tag{19}$$

を得る．これを解くと

$$(a,b)=(-3/10,-1/10) \tag{20}$$

なので，特解は

$$y=-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x \tag{21}$$

となるので，求める一般解は，

$$y=Ae^{x}+Be^{-2x}-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x \tag{22}$$

となる．

(3-4) $y''+y'-2y=e^{x}$

特性方程式 $\lambda^2+\lambda-2=0$ の解は $\lambda=1,-2$ なので，斉次方程式の一般解は $y=Ae^{x}+Be^{-2x}$ となる．

次に，特解を求める．微分方程式の右辺が基本解と一致しているので，

$$y=axe^{x} \tag{23}$$

とおく．微分すると，

$$y'=e^{x}(ax+a), \quad y''=e^{x}(ax+2a) \tag{24}$$

なので，これらを元の微分方程式に代入して，

$$e^{x}(ax+2a+ax+a-2ax)=3ae^{x}=e^{x} \tag{25}$$

より，

$$a=1/3 \tag{26}$$

なので，特解は

$$y=\frac{1}{3}xe^{x} \tag{27}$$

となるので，求める一般解は，

$$y=Ae^{x}+Be^{-2x}+\frac{1}{3}xe^{x} \tag{28}$$

となる．

(3-5) $y''+4y=\sin 2x$

特性方程式 $\lambda^2+4=0$ の解は $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$ なので，斉次方程式の一般解は $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ となる．

次に，特解を求める．微分方程式の右辺が基本解と一致しているので，

$$y=x(a\cos 2x+b\sin 2x) \tag{29}$$

とおく．微分すると，

$$\begin{aligned} y'&=(a\cos 2x+b\sin 2x)+x(-2a\sin 2x+2b\cos 2x)\\ y''&=(-4a\sin 2x+4b\cos x)+x(-4a\cos 2x-4b\sin 2x) \end{aligned} \tag{30}$$

なので，これらを元の微分方程式に代入して，

$$
\begin{aligned}
&(-4a\sin 2x + 4b\cos x) + x(-4a\cos 2x - 4b\sin 2x) + 4x(a\cos 2x + b\sin 2x) \\
&= -4a\sin 2x + 4b\cos x \\
&= \sin 2x
\end{aligned} \tag{31}
$$

より，

$$
a = -1/4, \quad b = 0 \tag{32}
$$

なので，特解は

$$
y = -\frac{1}{4}x\cos 2x \tag{33}
$$

となるので，求める一般解は，

$$
y = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x \tag{34}
$$

となる．