数学II　第7回　一階線形微分方程式

2015年11月17日　　担当：佐藤 純

問題1 以下の一階線形微分方程式を，与えられた初期条件のもとに解け．

(1-1) $y' - y = x \qquad (x, y) = (0, 0)$

右辺をゼロにおいた，$y' - y = 0$ をまず解く．これは変数分離形なので，

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y, \\ &\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x, \\ &\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x, \\ &\log y = x + C, \\ &y = Ae^x \end{aligned}$$

と解ける．ここで，A は積分定数であるが，x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)，もとの微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} &A'e^x + Ae^x - Ae^x = x, \\ &A' = xe^{-x} \end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる．これを積分して

$$\begin{aligned} A &= \int xe^{-x}\mathrm{d}x \\ &= \int x(-e^{-x})'\mathrm{d}x \\ &= -xe^{-x} + \int (x)'e^{-x}\mathrm{d}x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

と A が求まる．これを $y = Ae^x$ に代入して，$y = Ce^x - x - 1$ を得る．初期条件より $C = 1$ なので，

$$y = e^x - x - 1$$

となる．

(1-2) $y' - 2y = e^x \qquad (x, y) = (0, 0)$

右辺をゼロにおいた，$y' - 2y = 0$ をまず解く．これは変数分離形なので，

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y, \\ &\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\mathrm{d}x, \\ &\log y = 2x + C, \\ &y = Ae^{2x} \end{aligned}$$

と解ける．ここで，A は積分定数であるが，x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)，もとの微分方程式に代入すると，

$$A'e^{2x} + 2Ae^{2x} - 2Ae^{2x} = e^x,$$

$$A' = e^{-x}$$

と A に対する微分方程式が得られる．これを積分して

$$A = -e^{-x} + C$$

と A が求まる．これを $y = Ae^{2x}$ に代入して，$y = Ce^{2x} - e^{x}$ を得る．初期条件より $C = 1$ なので，

$$y = e^{2x} - e^{x}$$

となる．

(1-3) $y' + xy = x^3 \qquad (x, y) = (0, 0)$
右辺をゼロにおいた，$y' + xy = 0$ をまず解く．
これは変数分離形なので，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -xy, \\
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = -x\mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int x\mathrm{d}x, \\
&\log y = -\frac{1}{2}x^2 + C, \\
&y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

と解ける．ここで，A は積分定数であるが，x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)，もとの微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&A'e^{-\frac{1}{2}x^2} - xAe^{-\frac{1}{2}x^2} + xAe^{-\frac{1}{2}x^2} = x^3, \\
&A' = x^3 e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

と A に対する微分方程式が得られる．これを積分して

$$\begin{aligned}
A &= \int x^3 e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int x^2 (e^{\frac{1}{2}x^2})'\mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - \int (x^2)' e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\int x e^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= x^2 e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + C
\end{aligned}$$

と A が求まる．これを $y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$ に代入して，$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2$ を得る．初期条件より $C = 2$ なので，

$$y = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + x^2 - 2$$

となる．

(1-4) $y' + y\cos x = \sin 2x \qquad (x, y) = (0, 0)$
右辺をゼロにおいた，$y' + y\cos x = 0$ をまず解く．これは変数分離形なので，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\cos x,$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x \mathrm{d}x, \\
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \cos x \mathrm{d}x, \\
&\log y = -\sin x + C, \\
&y = Ae^{-\sin x}
\end{aligned}
$$

と解ける．ここで，A は積分定数であるが，x の関数 $A(x)$ であるとみなして (定数変化法)，もとの微分方程式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&A'e^{-\sin x} - \cos x A e^{-\sin x} + \cos x A e^{-\sin x} = \sin 2x, \\
&A' = \sin 2x e^{\sin x}
\end{aligned}
$$

と A に対する微分方程式が得られる．これを積分して

$$
\begin{aligned}
A &= \int \sin 2x e^{\sin x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int \sin x \cos x e^{\sin x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int (\sin x)' \sin x e^{\sin x} \mathrm{d}x \\
&= 2\int te^t \mathrm{d}t \qquad (t = \sin x) \\
&= 2\int t(e^t)' \mathrm{d}t \\
&= 2te^t - 2\int (t)'e^t \mathrm{d}t \\
&= 2(t-1)e^t + C \\
&= 2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C
\end{aligned}
$$

と A が求まる．これを $y = Ae^{-\sin x}$ に代入して，$y = Ce^{-\sin x} + 2(\sin x - 1)e^{\sin t}$ を得る．初期条件より $C = 2$ なので，

$$
y = 2(e^{-\sin x} + \sin x - 1)
$$

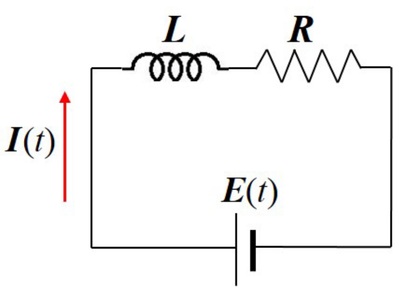
となる．

問題 2 自己インダクタンス L のコイルと抵抗 R を直列につないだ回路に，時刻 t における起電力が $E(t)$ で与えられる電源をつなぐ．この回路に流れる電流 $I(t)$ は，微分方程式

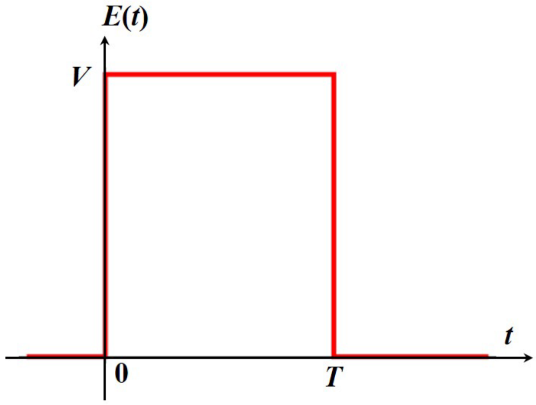
$$
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) + RI(t) = E(t)
$$

を満たす．初期条件として，$t < 0$ のとき電源はオフで，$E(t) = I(t) = 0$ とする．

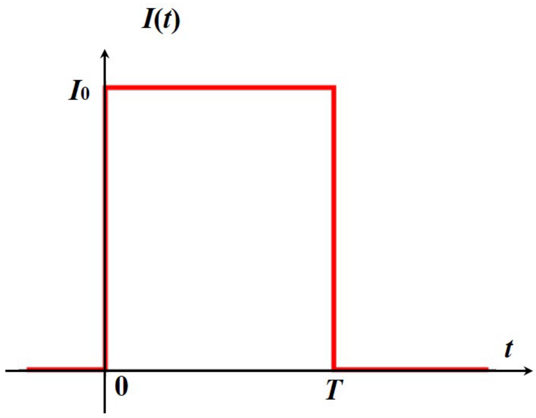
時刻 $t = 0$ に電源をオンにして起電力 V (=定数) を与え，時刻 $t = T$ に再び電源をオフにする．すなわち，$0 < t < T$ で $E(t) = V$, $t > T$ で $E(t) = 0$ とする．



(2-1) 回路の起電力 $E(t)$ のグラフを描け.



(2-2) $L=0$ のとき，回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描け.
$L=0$ のとき，$I(t)=\dfrac{E(t)}{R}$ なので，電流は単に電圧に比例し（オームの法則），グラフは以下のようになる.



ただし，$I_0=V/R$ である.

(2-3) $L>0$ のとき，回路を流れる電流 $I(t)$ のグラフを描け.
微分方程式を変形すると，

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L}\{E(t)-RI(t)\}=-\frac{R}{L}\{I(t)-E(t)/R\}$$

となる.
$t<0$ のときは電源がオフで，$I(t)=0$ である.
$0<t<T$ のとき，$E(t)=V$ より，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}\{I-I_0\},\\
&\int\frac{\mathrm{d}I}{I-I_0}=-\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t,\\
&\log(I-I_0)=-\frac{R}{L}t+C,\\
&I-I_0=e^{-\frac{R}{L}t+C}=e^Ce^{-\frac{R}{L}t}=Ae^{-\frac{R}{L}t}\quad(A=e^C)
\end{aligned}$$

ここで，初期条件 $I(0)=0$ より，$0-I_0=Ae^0=A$ より，$A=-I_0$ なので，

$$I(t)=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

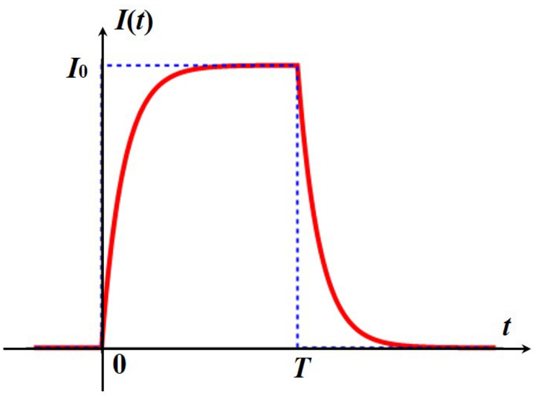
を得る．
$t>T$ のときは，$E(t)=0$ より，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{L}I,\\
&\int\frac{\mathrm{d}I}{I}=-\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t,\\
&\log I=-\frac{R}{L}t+D,\\
&I=e^De^{-\frac{R}{L}t}=Be^{-\frac{R}{L}t}\quad(B=e^D)
\end{aligned}$$

を得る．上で得た $0<t<T$ での解との接続条件 $I(T)=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}T})$ から，積分定数 B を決定する．
ここで，$I_T=I(T)=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}T})$ とおくと，$I_T=Be^{-\frac{R}{L}T}$ より，$B=I_Te^{\frac{R}{L}T}$ を得る．したがって，

$$I(t)=I_Te^{-\frac{R}{L}(t-T)}$$

となる．



スイッチを on, off しても電流値は即座に反応せず，応答に遅れが生じている．
しかし，一定時間経過後には，コイルがないときの電流値に収束している．