数学 II　第 6 回　変数分離型微分方程式

2015 年 11 月 10 日　担当：佐藤 純

問題 1 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

以下，A, B は積分定数である

(1-1) $y' = 3y$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 3\int \mathrm{d}x, \quad \log y = 3x + A, \quad y = e^{3x+A} = e^A e^{3x}.$$

ここで，$B = e^A$ とおくと，$\boxed{y = Be^{3x}}$

(1-2) $y' = x(1-y)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(1-y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = x\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} = \int x\mathrm{d}x, \quad -\log(1-y) = \frac{1}{2}x^2 + A,$$
$$1 - y = e^{-\frac{1}{2}x^2 - A} = e^{-A}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

ここで，$B = e^{-A}$ とおくと，$\boxed{y = 1 + Be^{-\frac{1}{2}x^2}}$

(1-3) $y' = y^2x^3$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2x^3, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = x^3\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x^3\mathrm{d}x, \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{4}x^4 + A, \quad \boxed{y = \frac{4}{B - x^4}}$$

(1-4) $yy' = x$

$$y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x, \quad \int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x, \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + A, \quad \boxed{x^2 - y^2 = B}$$

(1-5) $yy' = xe^{x^2+y^2}$

$$\int ye^{-y^2}\mathrm{d}y = \int xe^{x^2}\mathrm{d}x, \quad -\frac{1}{2}e^{-y^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + A, \quad \boxed{e^{x^2} + e^{-y^2} = B}$$

(1-6) $y' = 1 - y^2$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - y^2, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = \int \mathrm{d}x, \quad \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = x + A, \quad \frac{1+y}{1-y} = e^{2x+2A} = e^{2A}e^{2x}.$$

ここで，$B = e^{2A}$ とおいて y について解くと，$\boxed{y = \frac{Be^{2x} - 1}{Be^{2x} + 1}}$

(1-7) $y' + y\tan x = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\tan x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \tan x\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\mathrm{d}x,$$
$$\log y = \log\cos x + A, \quad y = e^{\log\cos x + A} = e^A e^{\log\cos x} = e^A\cos x.$$

ここで，$B = e^A$ とおくと，$\boxed{y = B\cos x}$

問題 2 以下の微分方程式を初期条件 $(x, y) = (0, 1)$ のもとで解け.

(2-1) $y' = 3y$

一般解 $y = Be^{3x}$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入して，$B = 1$ を得るので，$\boxed{y = e^{3x}}$ となる.

(2-2) $y' = y^2 x^3$

一般解 $y = \dfrac{4}{B - x^4}$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入して，$B = 4$ を得るので，$\boxed{y = \dfrac{4}{4 - x^4}}$ となる.

(2-3) $yy' = x$

一般解 $x^2 - y^2 = B$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入して，$B = -1$ を得るので，$\boxed{x^2 - y^2 + 1 = 0}$ となる.

(2-4) $y' + y \tan x = 0$

一般解 $y = B \cos x$ に $(x, y) = (0, 1)$ を代入して，$B = 1$ を得るので，$\boxed{y = \cos x}$ となる.

問題 3 反応速度定数 k の化学反応 $A + B \to C$ を考える.

(3-1) 時刻 $t = 0$ での A, B の濃度を N とし, C の濃度を 0 とする.
化学反応で C が x だけ生成されたとき，A, B の濃度を求めよ.

$\boxed{N - x}$

(3-2) 時刻 t における C の濃度 $x(t)$ が満たす微分方程式を書け.

C の生成速度 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ は A の濃度 $N - x$ と B の濃度 $N - x$ の積 $(N - x)^2$ に比例し，その比例定数が反応速度定数 k であるので,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(N - x)^2}$$

となる.

(3-3) 上の微分方程式を解くことにより $x(t)$ を求め，グラフを描け.

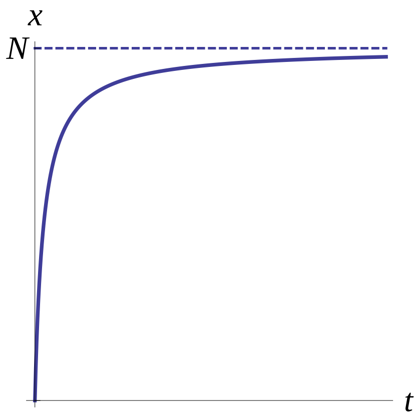
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(N - x)^2} = \int k\mathrm{d}t, \quad \frac{1}{N - x} = kt + A$$

$y = N - x$ とおくと，$\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$ より,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(N - x)^2} = \int \frac{-\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{1}{y} = \frac{1}{N - x}$$

ここで，初期条件 $x(0) = 0$ より，$A = 1/N$ なので,

$$\frac{1}{N - x} = kt + \frac{1}{N}, \quad \boxed{x(t) = N\left(1 - \frac{1}{Nkt + 1}\right)}$$



最初は一気に反応が進むが，だんだん緩慢になり，濃度が N に達するまでには無限に時間がかかる．

問題 4 地上の高い地点から質量 m のボールをそっと放し，ボールを落下させる．
その際，ボールは速度に比例する空気抵抗を受けるとし，その比例定数を γ とする．
鉛直下向きに z 軸を取り，ボールの初期位置を $z = 0$ とする．

(4-1) ボールの運動方程式を立てよ．

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \gamma v}$$

(4-2) 空気抵抗と重力が釣り合う条件から，時刻無限大 $t \to \infty$ でのボールの速度 v_∞ を求めよ．

$mg = \gamma v_\infty$ より，$\boxed{v_\infty = \dfrac{mg}{\gamma}}$

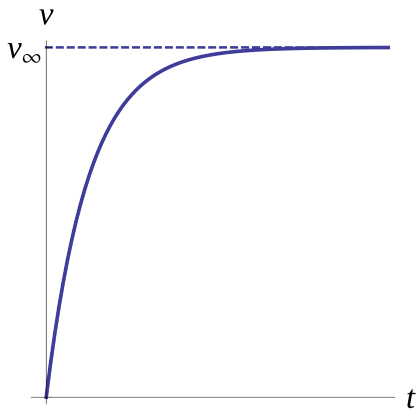
(4-3) 運動方程式を解くことにより，時刻 t における物体の速度 $v(t)$ を求め，グラフを描け．

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\gamma}{m}v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right) = -\frac{\gamma}{m}\left(v - v_\infty\right), \\
&\int \frac{\mathrm{d}v}{v - v_\infty} = -\int \frac{\gamma}{m}\mathrm{d}t, \\
&\log(v - v_\infty) = -\frac{\gamma}{m}t + A, \\
&v - v_\infty = Be^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad (B = e^A),
\end{aligned}$$

ここで，初期条件 $v(0) = 0$ より，$-v_\infty = B$ なので，

$$\boxed{v = v_\infty\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)}$$

を得る．



(4-4) 空気抵抗を小さくする極限 $\gamma \to 0$ で，ボールの運動は空気抵抗がない場合の自由落下 $(v = gt)$ になることを示せ．

$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$ より，$\gamma \ll 1$ のとき，

$$v = v_\infty\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = v_\infty\left\{1 - \left(1 - \frac{\gamma}{m}t + \cdots\right)\right\} = v_\infty\frac{\gamma}{m}t = gt$$

となる．