

問題1 以下の不定積分を計算せよ。

(1-1) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

(1-5) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

(1-2) $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$

(1-6) $\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (t = x + \sqrt{x^2 + 1})$

(1-3) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

(1-7) $\int \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \quad (t = \sqrt{\frac{1-x}{x}})$

(1-4) $\int \frac{dx}{\sin x}$

問題2 正の実数 t に対し，ガンマ関数 $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ を定義する。

(2-1) 漸化式 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ を示せ。

(2-2) 自然数 n に対し， $\Gamma(n) = (n-1)!$ を示せ。

ただし， $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ ， $0! = 1$ である。

問題3 正の実数 s, t に対し，ベータ関数 $B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx$ を定義する。

(3-1) $B(s, t) = B(t, s)$ を示せ。

(3-2) $B(s, t+1) = \frac{t}{s} B(s+1, t)$ を示せ。

(3-3) 自然数 n, m に対し， $B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$ を示せ。

(3-4) 自然数 n, m に対し， $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n (\beta-x)^m dx = (\beta-\alpha)^{n+m+1} \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$ を示せ。

(3-5) 定積分 $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x) dx$ ， $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2 dx$ ， $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(\beta-x)^2 dx$ を計算せよ。

問題4 以下の積分を計算せよ。

(4-1) 定積分 $\int_1^{e^\pi} \sin(\log x) dx$ の値を求めよ。

(4-2) 定積分に読み替えることによって，極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

を計算せよ。

(4-3) 置換 $x = \tan \theta$ を用いて，定積分

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1} dx$$

を計算せよ。