数学II　第4回　定積分の応用

2015年10月20日　　担当：佐藤 純

問題1 xy 平面内の曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を考える．

(1-1) この曲線を xy 平面内に図示せよ．

$$0 \leq \sqrt{x} = 1-\sqrt{y} \leq 1$$

より，$0 \leq x \leq 1$ である．同様に，$0 \leq y \leq 1$ を得る．よって，グラフは $0 \leq x, y \leq 1$ の範囲内にある．

また，グラフは2点 $(1,0)$ と $(0,1)$ を通る．

曲線の式を y について解くと，

$$y = (1-\sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x}$$

となり，これを微分すると $y' = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ となる．

曲線の式を直接微分して，

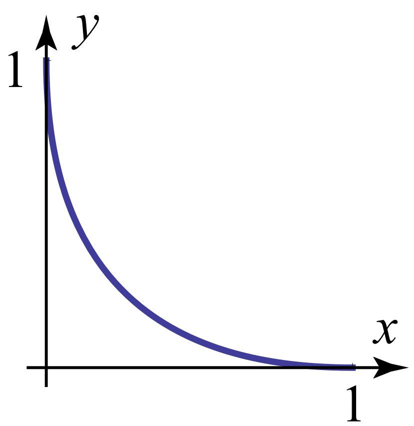
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y = 0$$

として，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

としても同じ結果を得る．

範囲 $0 < x < 1$ において $y' < 0$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to+0} y' = -\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to 1} y' = 0$ より，下図のようなグラフになる．



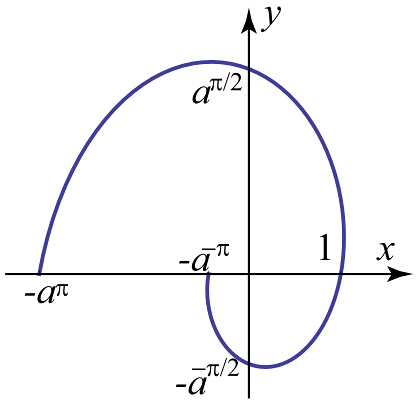
(1-2) 上で描いた曲線と，x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

$$S = \int_0^1 y\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\,(1 + x - 2\sqrt{x}) \\
&= \left[x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \\
&= \boxed{\frac{1}{6}}
\end{aligned}
$$

問題 2 極方程式 $r = a^\theta\ (a > 1, -\pi \le \theta \le \pi)$ で表される曲線を考える．

(2-1) この曲線を，xy 平面内に図示せよ．

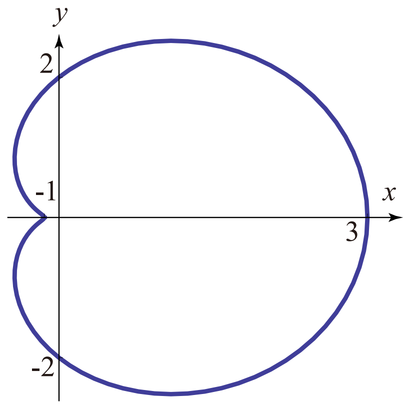


(2-2) 上で描いた曲線のうち，$0 \le \theta \le \pi/2$ の部分と，x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} r^2 \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} a^{2\theta} \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} e^{2\theta \log a} \\
&= \left[\frac{1}{4\log a} e^{2\theta \log a}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \left[\frac{1}{4\log a} a^{2\theta}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \boxed{\frac{1}{4\log a}(a^\pi - 1)}
\end{aligned}
$$

問題 3 極方程式 $r = 2 + \cos\theta\ (-\pi \le \theta \le \pi)$ で表される曲線を考える．

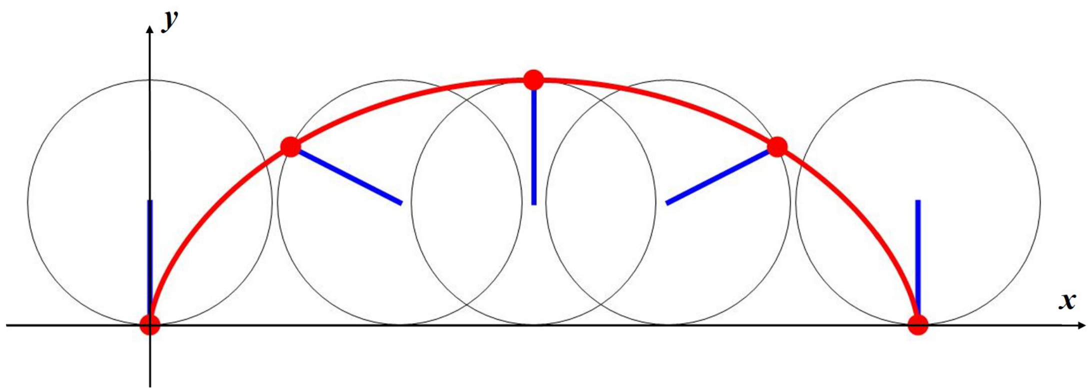
(3-1) この曲線を，xy 平面内に図示せよ．



(3-2) 上で描いた閉曲線が囲む面積を求めよ．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} r^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} (2+\cos\theta)^2 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} \left(4+4\cos\theta+\cos^2\theta\right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{2} \left(4+4\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \left(\frac{9}{4}+2\cos\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta\right) \\
&= \left[\frac{9}{4}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{8}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \boxed{\frac{9}{2}\pi}
\end{aligned}
$$

問題 4 半径 r の円が，x 軸上を図のように滑らずに回転する．円にはボールが固定されている．最初ボールは原点で x 軸に接していて，円が一周して再び x 軸に接するまでのボールの軌跡を考える．



(4-1) 円が θ だけ回転 $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ したときのボールの位置座標を求めよ．

円が θ だけ回転したきときの円の中心座標は $(r\theta, r)$ なので，
ボールの位置は

$$
(x, y) = (r\theta, r) - (r\sin\theta, r\cos\theta)
$$

$$
\begin{aligned}
&= (r\theta - r\sin\theta, r - r\cos\theta) \\
&= \boxed{r(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)}
\end{aligned}
$$

(4-2) ボールの軌跡の全長を求めよ.

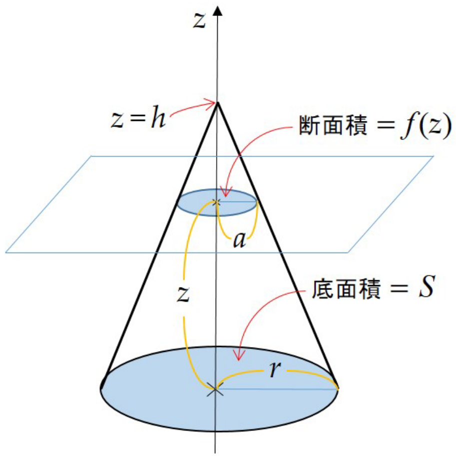
$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \\
&= r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{1-\cos\theta} \\
&= \sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= 2r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sin\frac{\theta}{2} \\
&= 4r\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \boxed{8r}
\end{aligned}
$$

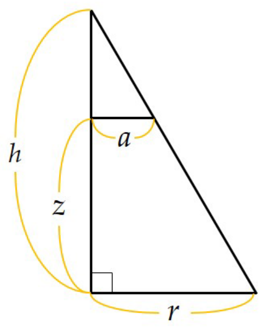
(4-3) ボールの軌跡と x 軸で囲まれる面積を求めよ.

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi r} y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) \\
&= r^2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \\
&= r^2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) \\
&= r^2\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= \boxed{3\pi r^2}
\end{aligned}
$$

問題 5 以下の体積を積分計算によって求めよ.

(5-1) 底面積 S, 高さ h の円錐の体積 V.





左図のように，円錐を高さ z の水平な平面で切り，その断面積を $f(z)$ とする．底面の円の半径を r とすると，底面積は S なので $S = \pi r^2$ である．
右図を見て分かるように，三角形の相似から，$h : r = (h-z) : a$ より，$ha = r(h-z)$ なので，$a = \frac{r}{h}(h-z)$ となる．したがって断面積は

$$f(z) = \pi a^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}(h-z)^2 = \frac{S}{h^2}(h-z)^2$$

で与えられるので，体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \mathrm{d}z f(z) \\ &= \frac{S}{h^2}\int_0^h \mathrm{d}z (h-z)^2 \\ &= \frac{S}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-z)^3\right]_0^h \\ &= \boxed{\frac{hS}{3}} \end{aligned}$$

となる．

(5-2) 半径 r の球の体積 V.

高さ z における球の断面積 $f(z)$ は，

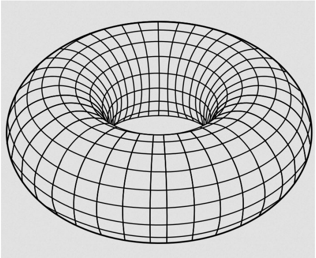
$$f(z) = \pi(r^2 - z^2)$$

で与えられるので，体積 V は

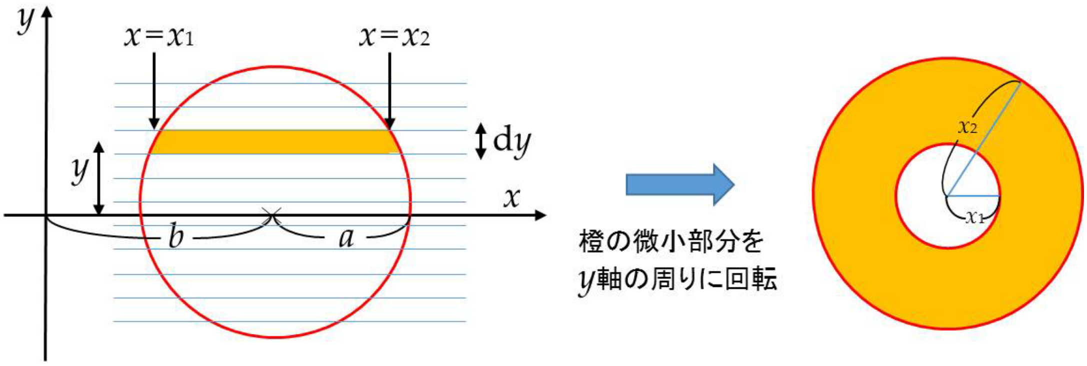
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}z f(z) \\ &= \pi\int_{-r}^{r} \mathrm{d}z (r^2 - z^2) \\ &= \pi\left[r^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_{-r}^{r} \\ &= \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3} \end{aligned}$$

となる．

(5-3) 円 $(x-b)^2+y^2=a^2$, $(0<a<b)$ が y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V.



円を微小幅 $\mathrm{d}y$ で細かく刻み，たくさんの棒に分割する．そのうちのひとつ（橙色の部分）だけを y 軸の周りに回転させると，その断面は右図のような真中が空洞のディスクになる．



このディスクの面積は，高さ y に依存するので $f(y)$ と書く．すると，棒の x 座標を x_1, x_2 とすると，大円から小円の面積を引いて

$$f(y)=\pi x_2^2-\pi x_1^2$$

となる．よって，この微小立体の体積 $\mathrm{d}V$ は，この断面積に厚み $\mathrm{d}y$ をかけて，$\mathrm{d}V=f(y)\mathrm{d}y$ となる．全体の体積 V は，この微小立体の体積を全部足し合わせて

$$V=\int \mathrm{d}V=\int_{-a}^{a} f(y)\mathrm{d}y$$

と求まる．

x_1, x_2 を具体的に求めるために，円の式を x について解くと，

$$x=b\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

なので，y における立体の断面積 $f(y)$ は，

$$\begin{aligned} f(y)&=\pi\left(b+\sqrt{a^2-y^2}\right)^2-\pi\left(b-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2 \\ &=4\pi b\sqrt{a^2-y^2} \end{aligned}$$

となる．よって，この立体の体積 V は，

$$\begin{aligned} V&=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\, f(y) \\ &=4\pi b\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\sqrt{a^2-y^2} \end{aligned}$$

となる．

$y=a\sin t$ とすると，

$$V=4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t(a\cos t)\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \cos^2 t \\
&= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \frac{1+\cos 2t}{2} \\
&= 4\pi a^2 b \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \boxed{2\pi^2 a^2 b}
\end{aligned}
$$

を得る.