

**問題1** 以下の関数  $f(x)$  の原始関数  $F(x)$  を求めよ .

(1-1)  $f(x) = 2$                        $F(x) = 2x$

(1-2)  $f(x) = x$                          $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

(1-3)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$                        $F(x) = -\frac{1}{x}$

(1-4)  $f(x) = \sqrt{x}$                        $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

(1-5)  $f(x) = \sin x$                        $F(x) = -\cos x$

(1-6)  $f(x) = \cos x$                        $F(x) = \sin x$

(1-7)  $f(x) = e^x$                          $F(x) = e^x$

(1-8)  $f(x) = \frac{1}{x}$                          $F(x) = \log x$

**問題2** 区間  $0 \leq x \leq \pi$  における  $f(x) = \sin x$  のグラフと ,

$x$  軸に囲まれた部分の面積  $S$  を区分求積法で計算する .

区間  $0 \leq x \leq \pi$  を  $N$  分割し ,  $\Delta x = \frac{\pi}{N}$  ,  $x_n = n\Delta x = \frac{\pi}{N}n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) とする .

短冊の面積の和を  $S_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$  とすれば ,  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  となる .

(2-1) オイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を使って ,  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  を示せ .

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

より , 両辺を引き算して ,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= 2i \sin \theta. \end{aligned}$$

両辺を  $2i$  で割って , 与式を得る .

(2-2) 上で示した式と等比級数の和の公式を使って ,  $S_N = \frac{\pi}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{1 - \cos \frac{\pi}{N}}$  を示せ .

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{n}{N}\pi\right) \frac{\pi}{N} \\
&= \frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(\frac{n}{N}\pi\right) \\
&= \frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{i\frac{n}{N}\pi} - e^{-i\frac{n}{N}\pi}}{2i} \\
&= \frac{\pi}{2iN} \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{n}{N}\pi} - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{n}{N}\pi} \right).
\end{aligned}$$

ここで、この等比級数を  $T$  とすると、

$$\begin{aligned}
T &= 1 + e^{i\frac{1}{N}\pi} + e^{i\frac{2}{N}\pi} + \dots + e^{i\frac{N-1}{N}\pi} \\
Te^{i\frac{\pi}{N}} &= e^{i\frac{1}{N}\pi} + e^{i\frac{2}{N}\pi} + \dots + e^{i\frac{N-1}{N}\pi} + e^{i\frac{N}{N}\pi}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $e^{i\frac{N}{N}\pi} = e^{i\pi} = -1$  である。上の2式を辺々引き算することによって、

$$(1 - e^{i\frac{\pi}{N}})T = 1 - (-1) = 2$$

を得る。結局、この等比級数は

$$T = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{n}{N}\pi} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{N}}}$$

となる。全く同様に、

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{n}{N}\pi} = \frac{2}{1 - e^{-i\frac{\pi}{N}}}$$

を得る。

以上をまとめて、

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{\pi}{2iN} \left( \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{N}}} - \frac{2}{1 - e^{-i\frac{\pi}{N}}} \right) \\
&= \frac{\pi}{iN} \left( \frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{N}}} - \frac{1}{1 - e^{-i\frac{\pi}{N}}} \right) \\
&= \frac{\pi}{iN} \frac{(1 - e^{-i\frac{\pi}{N}}) - (1 - e^{i\frac{\pi}{N}})}{(1 - e^{i\frac{\pi}{N}})(1 - e^{-i\frac{\pi}{N}})} \\
&= \frac{\pi}{iN} \frac{e^{i\frac{\pi}{N}} - e^{-i\frac{\pi}{N}}}{2 - (e^{i\frac{\pi}{N}} + e^{-i\frac{\pi}{N}})} \\
&= \frac{\pi}{iN} \frac{2i \sin \frac{\pi}{N}}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{N}} \\
&= \frac{\pi}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{1 - \cos \frac{\pi}{N}}
\end{aligned}$$

を得る。

(2-3) 極限  $N \rightarrow \infty$  をとることによって、 $S$  の値を求めよ。

$\epsilon = \frac{\pi}{N}$  とおくと、 $N \rightarrow \infty$  で  $\epsilon \rightarrow 0$  なので、

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{1 - \cos \frac{\pi}{N}} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon \sin \epsilon}{1 - \cos \epsilon}
\end{aligned}$$

を得る．これは  $0/0$  の不定形なので，ロピタルの定理を（繰り返し）使うと，

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon \sin \epsilon}{1 - \cos \epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\epsilon \sin \epsilon)'}{(1 - \cos \epsilon)'} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \epsilon + \epsilon \cos \epsilon}{\sin \epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\sin \epsilon + \epsilon \cos \epsilon)'}{(\sin \epsilon)'} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \epsilon + \cos \epsilon - \epsilon \sin \epsilon}{\cos \epsilon} \\
&= \frac{1 + 1 - 0}{1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

を得る．

(2-4)  $f(x)$  の原始関数  $F(x)$  を求めよ．

$$F(x) = -\cos x$$

(2-5) 微分積分学の基本定理  $S = F(\pi) - F(0)$  が成り立っていることを確認せよ．

$F(\pi) - F(0) = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$  より，確かに  $S = F(\pi) - F(0) = 2$  が成り立っている．