数学 II　期末試験　解答

2016 年 01 月 21 日　　担当：佐藤 純

1. バネ定数 k のバネに質量 m のおもりを付け，他端を固定する．おもりと机の間には速度に比例した摩擦力が働くとすると，おもりの運動方程式は

$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t)$$

と書ける．おもりにつり合いの位置で初速度 v_0 を与えた時 ($x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$)，その後のおもりの運動 $x(t)$ を決定し，グラフに表せ．ただし，摩擦は十分に小さいとする．

$x(t) = e^{\lambda t}$ を運動方程式に代入すると，

$$\begin{aligned} m\lambda^2 e^{\lambda t} &= -ke^{\lambda t} - \gamma\lambda e^{\lambda t}, \\ m\lambda^2 + \gamma\lambda + k &= 0 \end{aligned}$$

となる．式を綺麗にするため，$\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ を導入すると，特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$$

となる．これを解くと，

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

となる．摩擦が十分小さいとすると，$\beta < \omega$ なので，$\omega^2 - \beta^2 > 0$ より，$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ とおくと，$\lambda = -\beta \pm \mathrm{i}\omega_0$ となり，一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(-\beta + \mathrm{i}\omega_0)t} + Be^{(-\beta - \mathrm{i}\omega_0)t} \\ &= e^{-\beta t}(Ae^{\mathrm{i}\omega_0 t} + Be^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) \\ &= e^{-\beta t}(C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t) \end{aligned}$$

となる．ただし，$C = A + B$, $D = \mathrm{i}(A - B)$ とおいた．

初期条件は，$x(0) = 0, v(0) = v_0$ となる．よって，$0 = x(0) = C$ を得る．また，

$$v(t) = x'(t) = e^{-\beta t}(\omega_0 D\cos\omega_0 t - \beta D\sin\omega_0 t)$$

より，

$$v_0 = v(0) = \omega_0 D$$

なので，

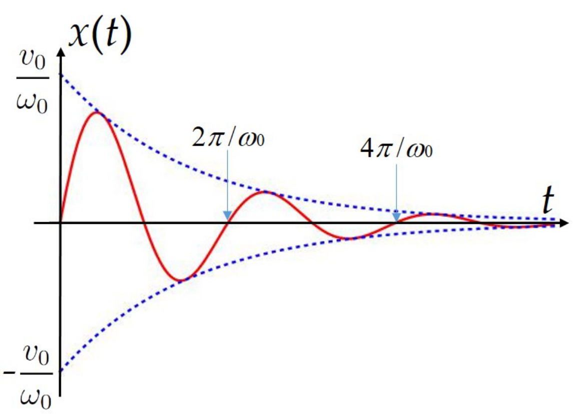
$$C = 0 \qquad D = \frac{v_0}{\omega_0}$$

を得る．

したがって，

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\beta t} \sin\omega_0 t}$$

となる．



微小な摩擦力によって減衰振動が起こる。

2. **(1)** $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ に対し，全微分 $\mathrm{d}f$ を計算せよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\mathrm{d}f = \boxed{\frac{2}{x^2 + y^2}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)}.$$

(2) $f(x, y) = e^{xy}$ に対し，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を示せ．

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) \\ &= (x)'e^{xy} + x(e^{xy})' = e^{xy} + xye^{xy} = \boxed{(1 + xy)e^{xy}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) = \boxed{(1 + xy)e^{xy}}. \end{aligned}$$

3. 原点 $(0, 0, 0)$ に電荷 q があるときの電位は

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる．ただし，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．

(1) 電場

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

を計算せよ．ただし，$\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi \\ &= -\vec{\nabla}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2 + y^2 + z^2)' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x \\ &= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} \\ &= -\frac{x}{r^3} \end{aligned}$$

同様に，

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}.$$

以上より，

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\frac{1}{r} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) \\
&= -\frac{1}{r^3}(x, y, z) \\
&= -\frac{\vec{r}}{r^3}.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) \\
&= \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}}
\end{aligned}
$$

(2) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ を示せ.

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} &= \frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \\
&= (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}2x \\
&= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}.
$$

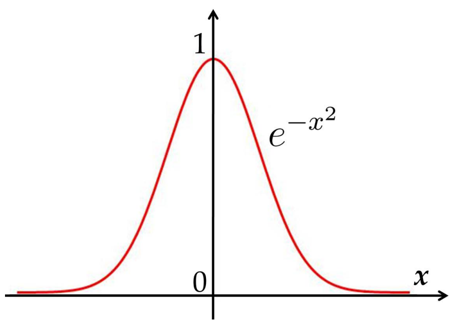
以上より,

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0
$$

4. (1) $y = e^{-x^2}$ のグラフの概形を書け.



(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ を計算せよ.

$I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ とし, I^2 を計算すると,

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}y\ e^{-(x^2+y^2)} \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\ re^{-r^2} \\
&= \left(\int_0^\infty re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^\infty [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(0-1)\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

より, $I = \sqrt{\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を得る.

$$
\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}
$$

5. $\Delta f(r) = 0$ となるような r の関数 $f(r)$ を全て求めよ. ただし, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}f(r) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f(r) = \frac{x}{r}f'(r) \\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(r) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r}f'(r) = \frac{1}{r}f'(r) + x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}f'(r) \\
&= \frac{1}{r}f'(r) + x\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}f'(r) = \frac{1}{r}f'(r) + x\frac{x}{r}\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2} \\
&= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)f'(r) + \frac{x^2 f''(r)}{r^2}
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(r) &= \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right)f'(r) + \frac{y^2 f''(r)}{r^2}, \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(r) &= \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)f'(r) + \frac{z^2 f''(r)}{r^2}
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\Delta f(r) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(r) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f(r) \\
&= \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right)f'(r) + \frac{(x^2+y^2+z^2)f''(r)}{r^2} \\
&= \frac{2}{r}f'(r) + f''(r) = 0
\end{aligned}
$$

を得る. $f'(r) = g(r)$ とすると,

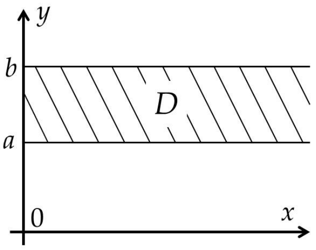
$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{r}g + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = 0, \\
&\frac{\mathrm{d}g}{g} = -\frac{2\mathrm{d}r}{r}, \\
&\int\frac{\mathrm{d}g}{g} = -\int\frac{2\mathrm{d}r}{r}, \\
&\log g = -2\log r + C = \log\frac{e^C}{r^2}, \\
&g = \frac{A}{r^2} \quad (A = e^C)
\end{aligned}
$$

より, $\boxed{f(r) = \dfrac{A}{r^2} + B}$ 　　(A, B は任意の定数)

6. 関数 $f(x,y)=e^{-xy}$ を下図の領域 D で積分することにより，定積分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$$

の値を求めよ．ただし，$0<a<b$ とする．



2 重積分

$$\iint_D e^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を，先に x，次に y で累次積分すると，

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^\infty \mathrm{d}x e^{-xy} &= \int_a^b \mathrm{d}y\left[-\frac{1}{y}e^{-xy}\right]_{x=0}^{x=\infty}\\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\frac{1}{y}\\ &= [\log y]_a^b\\ &= \log\frac{b}{a}\end{aligned}$$

を得る．一方，先に y，次に x で累次積分すると，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}y e^{-xy} &= \int_0^\infty \mathrm{d}x\left[-\frac{1}{x}e^{-xy}\right]_{y=a}^{y=b}\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

となる．積分の順序を入れ替えても値は変わらないので

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\log\frac{b}{a}}$$

を得る．