

- これは問題用紙です．持ち帰って下さい．空いてるスペースは計算用紙として使って下さい．
- これは解答用紙です．提出してください．答えだけでなく，途中計算も書くこと

1. バネ定数 k のバネに質量 m のおもりを付け，他端を固定する．おもりと机の間には速度に比例した摩擦力が働くとする．おもりの運動方程式は

$$mx''(t) = -kx(t) - \gamma x'(t)$$

と書ける．おもりにつり合いの位置で初速度 v_0 を与えた時 ($x(0) = 0, x'(0) = v_0$)，その後のおもりの運動 $x(t)$ を決定し，グラフに表せ．ただし，摩擦は十分に小さいとする．

2. (1) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ に対し，全微分 df を計算せよ．
 (2) $f(x, y) = e^{xy}$ に対し， $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を示せ．

3. 原点 $(0, 0, 0)$ に電荷 q があるときの電位は

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

で与えられる．ただし， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．

- (1) 電場

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

を計算せよ．ただし， $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ である．

- (2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ を示せ．

4. (1) $y = e^{-x^2}$ のグラフの概形を書け．

(2) 定積分 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ を計算せよ．

5. $\Delta f(r) = 0$ となるような r の関数 $f(r)$ を全て求めよ．ただし， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ， $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

6. 関数 $f(x, y) = e^{-xy}$ を下図の領域 D で積分することにより，定積分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

の値を求めよ．ただし， $0 < a < b$ とする．

