数学I　中間試験　解答

2015 年 6 月 3 日　担当：佐藤 純

問題 1 $\star$ (2 点 ×8=16 点)

以下の値を求めよ。

(1-1) $\sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$

(1-2) $\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

(1-3) $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

(1-4) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\cdot\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

(1-5) $\left(2^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} = 2^{-\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

(1-6) $\log_{10} 0.01 = \log_{10} 10^{-2} = -2$

(1-7) $\log_2 3 - \log_2 24 = \log_2 \frac{3}{24} = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

(1-8) $\log_9 27 = \log_9 3^3 = \log_9 (9^{\frac{1}{2}})^3 = \log_9 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

問題 2 $\star$ (2 点 ×4=8 点)

$z = 3 - 4\mathrm{i}$ のとき，以下の値を求めよ。

(2-1) 実部 $\mathrm{Re}\, z = 3$

(2-2) 虚部 $\mathrm{Im}\, z = -4$

(2-3) 複素共役 $z^* = 3 + 4\mathrm{i}$

(2-4) 絶対値 $|z| = 5$

問題 3 $\star$ (2 点 ×3=6 点)

$\alpha = 3 - \mathrm{i}$, $\beta = 1 - 2\mathrm{i}$ とする．以下の式を $x + \mathrm{i}y$ (x, y は実数) の形に計算せよ。

(3-1) $\alpha + \beta = 4 - 3\mathrm{i}$　**(3-2)** $\alpha\beta = 1 - 7\mathrm{i}$　**(3-3)** $\dfrac{\alpha}{\beta} = 1 + \mathrm{i}$

問題 4 $\star$ (3 点 ×5=15 点)

以下の複素数を $x + \mathrm{i}y$ (x, y は実数) の形に表せ。

(4-1) $e^{2\pi\mathrm{i}} = 1$

(4-2) $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$

(4-3) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$

(4-4) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

(4-5) $2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

$\boxed{\textbf{問題 5}}$ $\star$ (3 点 ×4=12 点)

以下の複素数を極形式で表せ。

(5-1) $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

(5-2) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

(5-3) $-\sqrt{6}+\sqrt{2}\mathrm{i}=2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

(5-4) $-2\mathrm{i}=2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\textbf{問題 6}}$ $\star$ (3 点 ×2=6 点)

オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ を使って，以下の式を証明せよ。

(6-1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$\begin{aligned}e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}&=e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta}=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

一方、$e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ なので、

$$\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

である。これの実部と虚部を比べて与式を得る。

(6-2) $\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$

$$\cos nx+\mathrm{i}\sin nx=e^{\mathrm{i}nx}=\left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n$$

$\boxed{\textbf{問題 7}}$ $\star$ (3 点 ×2=6 点)

(7-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式を書け。

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(7-2) $f(x)=\sin x$ の導関数を，上の定義式にしたがって計算せよ。

ただし，公式 $\lim_{h\to0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ を用いてよい．その他の極限値はきちんと示すこと．

$$\begin{aligned}(\sin x)'&=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\&=\sin x\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}\\
&= -\left(\lim_{h\to 0}\sin h\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h+1}\right)\\
&= -0\times 1\times\frac{1}{2}=0
\end{aligned}$$

より、

$$(\sin x)'=\cos x$$

$\boxed{\text{問題 8}}$ ⋆⋆ (4 点)

6 次方程式 $x^6=1$ の 6 つの複素数解を全て求めよ。

$x^6=1=e^{2n\pi \mathrm{i}}$ $(n=1,2,\cdots,6)$ より，$x=e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$ $(n=1,2,\cdots,6)$ なので、

$$x=\pm 1,\ \frac{\pm 1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

を得る。

$\boxed{\text{問題 9}}$ ⋆⋆ (3 点 ×4=12 点)

$\alpha=\sqrt{3}+\mathrm{i},\ \beta=1-\mathrm{i}$ とするとき、以下の値を求めよ。

(9-1) α^6

$\alpha=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ より，

$$\alpha^6=(2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})^6=2^6(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})^6=2^6e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}\times 6}=64e^{\pi\mathrm{i}}=-64$$

(9-2) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{12}$

$\beta=\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ より，$\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ を得る。これより，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}\right)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}\times 12}=2^6e^{5\mathrm{i}\pi}=-64$$

(9-3) β^8

$$\beta^8=(\sqrt{2})^8(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^8=2^4(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^8=2^4e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\times 8}=16e^{-2\pi\mathrm{i}}=16$$

(9-4) $\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}\right)^{1000}$

$\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}\beta} = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ なので，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}\right)^{1000} &= \left(e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}\right)^{1000} = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}\times 1000} = e^{\mathrm{i}\frac{1250}{3}\pi} = e^{\mathrm{i}\left(416+\frac{2}{3}\right)\pi} \\ &= e^{416\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = e^{416\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

を得る。

問題 10 ⋆⋆⋆ (3 点 ×2=6 点)

複素数 $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y は実数) に対し，以下の問いに答えよ．

(10-1) $|e^z| = e^x$ を示せ．

$$|e^z| = |e^{x+\mathrm{i}y}| = |e^x e^{\mathrm{i}y}| = |e^x||e^{\mathrm{i}y}| = e^x$$

マジメに計算すると，

$$\begin{aligned}|e^z| &= |e^{x+\mathrm{i}y}| = |e^x e^{\mathrm{i}y}| = |e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)| = |e^x\cos y + \mathrm{i}e^x \sin y| \\ &= \sqrt{(e^x\cos y)^2 + (e^x\sin y)^2} = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x\end{aligned}$$

(10-2) $|\cosh z|^2 = \dfrac{1}{2}(\cosh 2x + \cos 2y)$ を示せ．

ただし，$\cosh z$, $\sinh z$ は双曲線関数

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

である。

$$\begin{aligned}|\cosh z|^2 &= \left|\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right|^2 = \left|\frac{e^{x+\mathrm{i}y}+e^{-x-\mathrm{i}y}}{2}\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\left\{e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)+e^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y)\right\}\right|^2 \\ &= \left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos y + \mathrm{i}\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sin y\right|^2 \\ &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cos^2 y + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\sin^2 y \\ &= \left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}\right)(1-\sin^2 y) + \left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}\right)\sin^2 y \\ &= \left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}\right) + \sin^2 y\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4} - \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2} - \sin^2 y \\ &= \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2} - \frac{1-\cos 2y}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\cosh 2x + \cos 2y)\end{aligned}$$

(別解１)

$$
\begin{aligned}
|\cosh z|^2 &= |\cosh(x+\mathrm{i}y)|^2 \\
&= |\cosh x\cosh(\mathrm{i}y)+\sinh x\sinh(\mathrm{i}y)|^2 \\
&= |\cosh x\cos y+\mathrm{i}\sinh x\sin y|^2 \\
&= \cosh^2 x\cos^2 y+\sinh^2 x\sin^2 y \\
&= \cosh^2 x\cos^2 y+(\cosh^2 x-1)\sin^2 y \\
&= \cosh^2 x-\sin^2 y \\
&= \frac{1+\cosh 2x}{2}-\frac{1-\cos 2y}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\cosh 2x+\cos 2y)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
&\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y, \\
&\cosh(\mathrm{i}y)=\cos y, \qquad \sinh(\mathrm{i}y)=\mathrm{i}\sin y, \\
&\cosh^2 x-\sinh^2 x=1
\end{aligned}
$$

などの式を使った.

(別解２)

$$
\begin{aligned}
|\cosh z|^2 &= (\cosh z)(\cosh z)^* \\
&= \cosh z\cosh z^* \\
&= \frac{1}{4}(e^z+e^{-z})(e^{z^*}+e^{-z^*}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{z+z^*}+e^{z-z^*}+e^{-z+z^*}+e^{-z-z^*}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x}+e^{2\mathrm{i}y}+e^{-2\mathrm{i}y}+e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{2}(\cosh 2x+\cos 2y)
\end{aligned}
$$

問題 11 $\star\star\star$ (3 点 ×3=9 点)

半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を S_n とする (図２).

(11-1) ２辺の長さが a, b でその間の角度が θ の三角形の面積を求めよ (図１).

$\boxed{\frac{1}{2}ab\sin\theta}$

(11-2) S_n を求めよ.

$$
S_n = n\times\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n} = \boxed{\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}}
$$

(11-3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．この結果は何を意味するか？

$h=\dfrac{2\pi}{n}$ とおくと，$n\to\infty$ で $h\to 0$ であり，$n=\dfrac{2\pi}{h}$ なので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\frac{2\pi}{h}r^2\sin h\\ &= \pi r^2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \boxed{\pi r^2}\end{aligned}$$

これは，$\boxed{\text{円の面積に等しい}}$

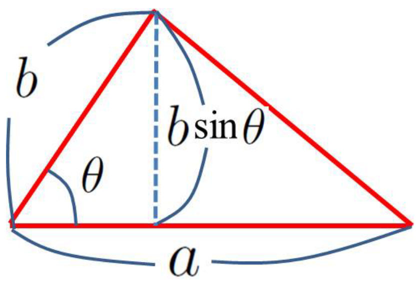

図 1

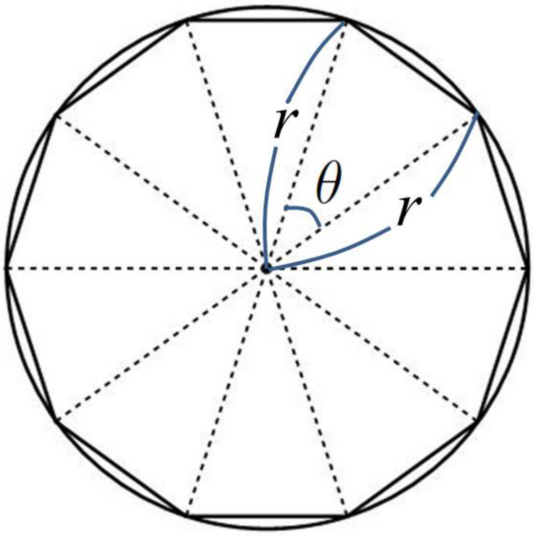

図 2