

問題1 * (2点×8=16点)

以下の値を求めよ。

(1-1) $\sin \frac{7}{6}\pi$

(1-4) $27^{\frac{2}{3}}$

(1-6) $\log_{10} 0.01$

(1-2) $\cos \frac{2}{3}\pi$

(1-7) $\log_2 3 - \log_2 24$

(1-3) $\tan \frac{\pi}{3}$

(1-5) $\left(2^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}$

(1-8) $\log_9 27$

問題2 * (2点×4=8点)

$z = 3 - 4i$ のとき，以下の値を求めよ。

(2-1) 実部 $\operatorname{Re} z$

(2-2) 虚部 $\operatorname{Im} z$

(2-3) 複素共役 z^*

(2-4) 絶対値 $|z|$

問題3 * (2点×3=6点)

$\alpha = 3 - i, \beta = 1 - 2i$ とする．以下の式を $x + iy$ (x, y は実数) の形に計算せよ。

(3-1) $\alpha + \beta$

(3-2) $\alpha\beta$

(3-3) $\frac{\alpha}{\beta}$

問題4 * (3点×5=15点)

以下の複素数を $x + iy$ (x, y は実数) の形に表せ。

(4-1) $e^{2\pi i}$

(4-2) $e^{i\pi}$

(4-3) $e^{i\frac{\pi}{2}}$

(4-4) $e^{i\frac{\pi}{3}}$

(4-5) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

問題5 * (3点×4=12点)

以下の複素数を極形式で表せ。

(5-1) $1 + i$

(5-2) $1 - \sqrt{3}i$

(5-3) $-\sqrt{6} + \sqrt{2}i$

(5-4) $-2i$

問題6 * (3点×2=6点)

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を使って，以下の式を証明せよ。

(6-1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

(6-2) $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$

問題7 * (3点×2=6点)

(7-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式を書け。

(7-2) $f(x) = \sin x$ の導関数を，上の定義式にしたがって計算せよ。

ただし，公式 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ を用いてよい．その他の極限值はきちんと示すこと．

問題8 ** (4点)

6次方程式 $x^6 = 1$ の6つの複素数解を全て求めよ。

問題9 ** (3点×4=12点)

$\alpha = \sqrt{3} + i$, $\beta = 1 - i$ とするとき、以下の値を求めよ。

- (9-1) α^6 (9-2) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12}$ (9-3) β^8 (9-4) $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}\right)^{1000}$

問題10 *** (3点×2=6点)

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) に対し、以下の問いに答えよ。

- (10-1) $|e^z| = e^x$ を示せ。
 (10-2) $|\cosh z|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2x + \cos 2y)$ を示せ。

ただし、 $\cosh z, \sinh z$ は双曲線関数

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

である。

問題11 *** (3点×3=9点)

半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を S_n とする (図2)。

- (11-1) 2辺の長さが a, b でその間の角度が θ の三角形の面積を求めよ (図1)。
 (11-2) S_n を求めよ。
 (11-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。この結果は何を意味するか？

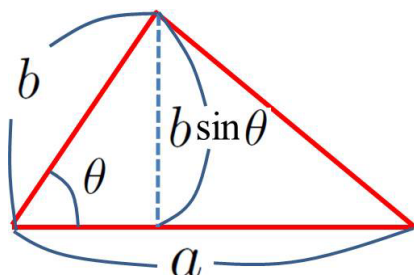


図1

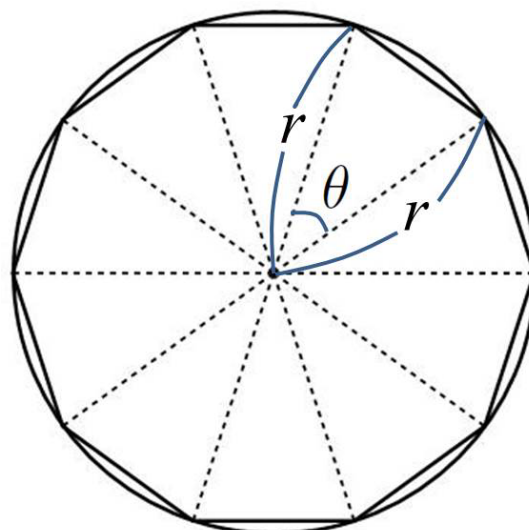


図2