数学I　期末試験　問題用紙

2015 年 7 月 23 日　　担当：佐藤 純

- これは問題用紙です．持ち帰って下さい．解答用紙は別紙です．
- 途中計算を略さず書くこと．

1. 3 点 O, A, B の座標を，O:$(0,0,0)$, A:$(2,-1,3)$, B:$(-1,1,2)$ とする．ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算せよ．

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2(-1)-1\times 1+3\times 2=\boxed{3}$

$\vec{a}\times\vec{b}=(-1\times 2-3\times 1, 3(-1)-2\times 2, 2\times 1-(-1)(-1))$

$=\boxed{(-5,-7,1)}$

(2) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ．

直線上の点を P: (x,y,z) とすると，
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(x-2,y+1,z-3)$ は
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,2,-1)$ に平行なので，ある実数 t を使って，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}&(x-2,y+1,z-3)=t(-3,2,-1),\\ &x-2=-3t,\quad y+1=2t,\quad z-3=-t,\\ &t=-\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3\end{aligned}$$

より，求める直線の方程式は

$\boxed{-\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=-z+3}$ となる．

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ．

平面上の点を P: (x,y,z) とすると，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp(\vec{a}\times\vec{b})$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$ より，

$$(x,y,z)\cdot(-5,-7,1)=-5x-7y+z=0$$

より，求める平面の方程式は

$\boxed{-5x-7y+z=0}$ となる．

(4) 三角形 OAB の面積を求めよ．

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(-7)^2+1^2}=\boxed{\frac{5}{2}\sqrt{3}}$$

2. 以下で与えられた関数 y を x で微分し，y' を求めよ．

(1) $y=(1-x^2)^5$

$y'=5(1-x^2)^4(1-x^2)'=\boxed{-10x(1-x^2)^4}$

(2) $y=x+\sqrt{x^2+1}$

$$\begin{aligned}y'&=(x)'+(\sqrt{x^2+1})'=1+\left\{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}'\\ &=1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\\ &=\boxed{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\end{aligned}$$

(3) $y=\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$

$$\begin{aligned}y'&=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\end{aligned}$$

(4) $y=e^{-x^2}$

$y'=e^{-x^2}(-x^2)'=\boxed{-2xe^{-x^2}}$

(5) $y=\sin^{-1}x$

$$\begin{aligned}&x=\sin y,\\ &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2},\\ &(\sin^{-1}x)'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\end{aligned}$$

(6) $y=(\log x)^3$

$$\begin{aligned}\left\{(\log x)^3\right\}'&=3(\log x)^2(\log x)'\\ &=\boxed{\frac{3(\log x)^2}{x}}\end{aligned}$$

(7) $y=x^x$

$$\begin{aligned}(x^x)'&=y(\log y)'=x^x(x\log x)'\\ &=x^x\left\{(x)'\log x+x(\log x)'\right\}\\ &=\boxed{(1+\log x)x^x}\end{aligned}$$

(8) $y=\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)\right)'\\ &=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{(e^{ax})'(a\sin bx-b\cos bx)\right.\\ &\qquad\left.+e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)'\right\}\\ &=\frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{ax}(a^2\sin bx-ab\cos bx)\right.\\ &\qquad\left.+e^{ax}(ab\cos bx+b^2\sin bx)\right\}\\ &=\boxed{e^{ax}\sin bx}\end{aligned}$$

(9) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{3}\log\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}$

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\left\{\frac{1}{3}\log(1+x)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{6}\log(1-x+x^2)\right\}'\\ &=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{4x^2-4x+1}{3}}+\frac{1}{3(1+x)}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\\ &=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{3(1+x)}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\\ &=\frac{1}{6}\frac{(3x+3)+(2x^2-2x+2)-(2x^2+x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\ &=\boxed{\frac{1}{x^3+1}}\end{aligned}$$

3. **(1)** $e^x, \cos x, \sin x$ をマクローリン展開し，
最初の第 4 項までを具体的に書き下せ．

$f(x) = e^x,\ f(0) = 1,$
$f'(x) = e^x,\ f'(0) = 1,$
$f''(x) = e^x,\ f''(0) = 1,$
$f'''(x) = e^x,\ f'''(0) = 1,$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots}$$

$f(x) = \sin x,\ f(0) = 0,$
$f'(x) = \cos x,\ f'(0) = 1,$
$f''(x) = -\sin x,\ f''(0) = 0,$
$f'''(x) = -\cos x,\ f'''(0) = -1,$
以下この 4 つの繰り返し

$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots}$$

$f(x) = \cos x,\ f(0) = 1,$
$f'(x) = -\sin x,\ f'(0) = 0,$
$f''(x) = -\cos x,\ f''(0) = -1,$
$f'''(x) = \sin x,\ f'''(0) = 0,$
以下この 4 つの繰り返し

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots}$$

(2) e^x の展開式に $x = \mathrm{i}\theta$ を代入することにより，
オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ を示せ．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

に $x = \mathrm{i}\theta$ を代入して，

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \mathrm{i}\theta + \frac{1}{2}(\mathrm{i}\theta)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}\theta)^3 + \frac{1}{4!}(\mathrm{i}\theta)^4 + \frac{1}{5!}(\mathrm{i}\theta)^5 + \cdots \\
&= 1 + \mathrm{i}\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \mathrm{i}\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \mathrm{i}\frac{1}{5!}\theta^5 \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right) \\
&\quad + \mathrm{i}\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta
\end{aligned}$$

を得る．

4. 以下の極限値を計算せよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \boxed{0}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\{\log(1+x)\}'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = \boxed{1}$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{1+x} = \frac{\log 1}{1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to 0}xe^{-x} = \left(\lim_{x\to 0}x\right)\left(\lim_{x\to 0}e^{-x}\right) = 0\times 1 = \boxed{0}$

(5) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \boxed{0}$

(6) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(3x^2)'}$
$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = \boxed{-\frac{1}{6}}$

(7) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^{-1}x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left\{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$

(8) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}x^3\left(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}}{-3\frac{1}{x^4}} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}x^4\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}x^4\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

5. **(1)** 3 辺の長さが a, b, c の三角形の面積は
$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と書けることを示せ．
ただし，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とした．

辺 a と辺 b の間の角を θ とすると $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であり，余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\theta = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2\theta) \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2\left[1 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2\left(1 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left[4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[(2ab)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right] \\
&= \frac{1}{16}\{(2ab) + (a^2+b^2-c^2)\}\{(2ab) - (a^2+b^2-c^2)\} \\
&= \frac{1}{16}(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\
&= \frac{1}{16}\{(a^2+2ab+b^2) - c^2\}\{c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))\} \\
&= \frac{1}{16}\{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2)\} \\
&= \frac{1}{16}\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c+(a-b)\} \\
&\qquad \times\{c-(a-b)\} \\
&= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\
&= \frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{c+a-b}{2}\times\frac{c-a+b}{2} \\
&= \frac{a+b+c}{2}\times\frac{(a+b+c)-2c}{2} \\
&\qquad \times\frac{(a+b+c)-2b}{2}\times\frac{(a+b+c)-2a}{2} \\
&= \frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \\
&\qquad \times\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)
\end{aligned}$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c)$$

より，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

を得る．

(2) e^π と π^e の大小関係を決定せよ．

どちらも正の数なので，(e^π, π^e) の対数をとると，$(\pi, e\log\pi)$ であるので，$\pi - e\log\pi$ の正負を考えればよい．ここで，定数 π を変数 x とした関数 $f(x) = x - e\log x$ を考え，$f(\pi) = \pi - e\log\pi$ の正負を調べる．まずは $f(x)$ のグラフを描く．

$$\lim_{x\to+0} f(x) = +0 - e\times(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - e\frac{\log x}{x}\right)$$

ここで，

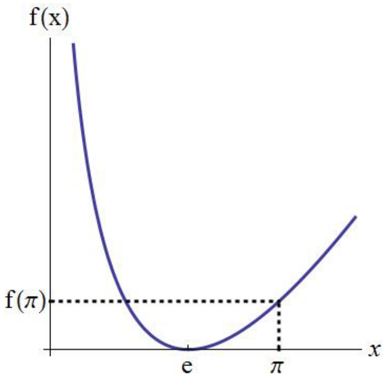
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

なので，

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\times(1-0) = +\infty$$

$f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x}$ より，増減表を書くと，

x	0	$\sim$	e	$\sim$	$+\infty$
f'	／	$-$	0	$+$	／
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$f(e) = 0$, $x > e$ で $f'(x) > 0$ より，$x > e$ で $f(x) > 0$ である．
したがって，$\pi > e$ より，$f(\pi) > 0$.
$f(\pi) = \pi - e\log\pi > 0$ より，
$\pi > e\log\pi$ である．
$\pi = \log e^\pi$, $e\log\pi = \log\pi^e$ より，
$\log e^\pi > \log\pi^e$ である．
$\log x$ は $x > 0$ で単調増加関数だから，
$\log e^\pi > \log\pi^e \iff e^\pi > \pi^e$ である．

6. べき級数の公式

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

は有名であるが，これの一般公式はあるのだろうか？

(1) $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ とし，数列 B_ℓ を

$$B_\ell = \lim_{x\to 0} f^{(\ell)}(x)$$

で定める．B_0, B_1, B_2 を具体的に計算せよ．

$$\boxed{B_0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x} = \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'}{e^x-1} + x\left\{(e^x-1)^{-1}\right\}' \\ &= \frac{1}{e^x-1} - x\,(e^x-1)^{-2}\,(e^x-1)' \\ &= \frac{1}{e^x-1} - \frac{xe^x}{(e^x-1)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{B_1} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{xe^x}{(e^x-1)^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\{(1-x)e^x-1\}'}{\left\{(e^x-1)^2\right\}'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)e^x - e^x}{2(e^x-1)e^x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2(e^x-1)} = -\frac{1}{2}B_0 = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} - \frac{(1+x)e^x}{(e^x-1)^2} + \frac{2xe^{2x}}{(e^x-1)^3} \\ &= \frac{(x+2)e^x + (x-2)e^{2x}}{(e^x-1)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{B_2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x+2)e^x + (x-2)e^{2x}}{(e^x-1)^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x+3)e^x + (2x-3)e^{2x}}{3(e^x-1)^2e^x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(x+3) + (2x-3)e^x}{3(e^x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1 + (2x-1)e^x}{6(e^x-1)e^x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(2x+1)e^x}{6(2e^x-1)e^x} = \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$f(x)$ をマクローリン展開すれば簡単に求めることができる．x の 3 次まで展開すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x-1} \\ &= \frac{x}{(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots) - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\cdots}$$

ここで，$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\cdots$ とすると，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+y} \\
&= 1-y+y^2-y^3+\cdots \\
&= 1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\cdots\right) \\
&+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)-\left(\frac{1}{8}x^3+\cdots\right) \\
&= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+0x^3+\cdots
\end{aligned}$$

より，ただちに $B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0$ を得る．

(2) 2 項係数を ${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ として ($0!=1$ とする)，数列 S_k を

$$S_k=\frac{1}{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_\ell B_\ell(n+1)^{k-\ell+1}$$

で定める．S_1, S_2, S_3 を具体的に n の式で表せ．
($B_3=0$ を用いてよい)

$$\begin{aligned}
\boxed{S_1} &= \frac{1}{2}\left\{{}_2\mathrm{C}_0B_0(n+1)^2+{}_2\mathrm{C}_1B_1(n+1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{1\cdot 1(n+1)^2+2(-\tfrac{1}{2})(n+1)\right\}=\boxed{\frac{1}{2}n(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{S_2} &= \frac{1}{3}\{{}_3\mathrm{C}_0B_0(n+1)^3+{}_3\mathrm{C}_1B_1(n+1)^2 \\
&\quad +{}_3\mathrm{C}_2B_2(n+1)\} \\
&= \frac{1}{3}\{1\cdot 1(n+1)^3+3(-\tfrac{1}{2})(n+1)^2 \\
&\quad +3\tfrac{1}{6}(n+1)\} \\
&= \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{S_3} &= \frac{1}{4}\{{}_4\mathrm{C}_0B_0(n+1)^4+{}_4\mathrm{C}_1B_1(n+1)^3 \\
&\quad +{}_4\mathrm{C}_2B_2(n+1)^2+{}_4\mathrm{C}_3B_3(n+1)\} \\
&= \frac{1}{4}\{1\cdot 1(n+1)^4+4(-\tfrac{1}{2})(n+1)^3 \\
&\quad +6\tfrac{1}{6}(n+1)^2+4\cdot 0(n+1)\} \\
&= \boxed{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

一般に，

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_\ell B_\ell(n+1)^{k-\ell+1}$$

が成り立つ．ここで，B_ℓ はベルヌーイ数と呼ばれる．
(実は江戸中期に日本の関孝和が既に発見しており，関・ベルヌーイ数と呼ぶのが正しい．)