数学 I　期末試験

2015 年 7 月 23 日　　担当：佐藤 純

- **これは問題用紙です．持ち帰って下さい．解答用紙は別紙です．**
- **途中計算を略さず書くこと．**

1. 3 点 O, A, B の座標を, O:$(0,0,0)$, A:$(2,-1,3)$, B:$(-1,1,2)$ とする．ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ を計算せよ．

(2) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ．

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の方程式を求めよ．

(4) 三角形 OAB の面積を求めよ．

2. 以下で与えられた関数 y を x で微分し，y' を求めよ．

(1) $y=(1-x^2)^5$

(2) $y=x+\sqrt{x^2+1}$

(3) $y=\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$

(4) $y=e^{-x^2}$

(5) $y=\sin^{-1}x$

(6) $y=(\log x)^3$

(7) $y=x^x$

(8) $y=\dfrac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$

(9) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{3}\log\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}$

3. **(1)** e^x, $\cos x$, $\sin x$ をマクローリン展開し，最初の第 4 項までを具体的に書き下せ．

(2) e^x の展開式に $x=\mathrm{i}\theta$ を代入することにより，オイラーの公式 $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ を示せ．

4. 以下の極限値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{1+x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}xe^{-x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3\left(\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$

5. **(1)** 3 辺の長さが a,b,c の三角形の面積は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と書けることを示せ．ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とした．

(2) e^π と π^e の大小関係を決定せよ．

6. べき級数の公式

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

は有名であるが，これの一般公式はあるのだろうか？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ とし，数列 B_ℓ を

$$B_\ell=\lim_{x\to 0}f^{(\ell)}(x)$$

で定める．B_0, B_1, B_2 を具体的に計算せよ．

(2) 2 項係数を ${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ として $(0!=1$ とする$)$，数列 S_k を

$$S_k=\frac{1}{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_\ell B_\ell(n+1)^{k-\ell+1}$$

で定める．S_1, S_2, S_3 を具体的に n の式で表せ．
$(B_3=0$ を用いてよい$)$