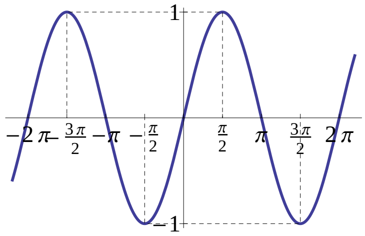
数学演習 I　第 13 回　微分の応用

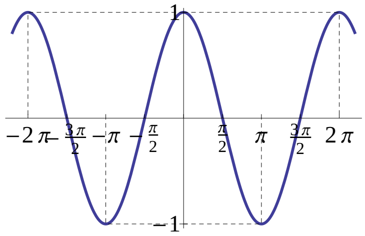
2015 年 7 月 8 日　　担当：佐藤 純

問題 1 以下の関数のグラフを描け.

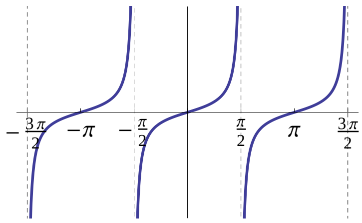
(1-1) $y = \sin x$



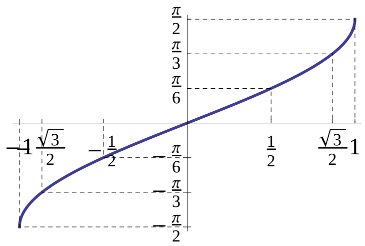
(1-2) $y = \cos x$



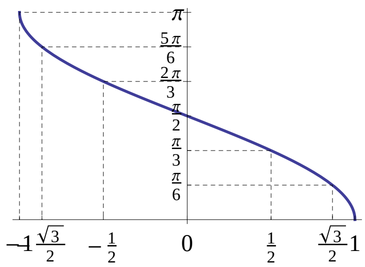
(1-3) $y = \tan x$



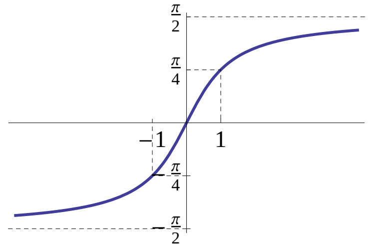
(1-4) $y = \sin^{-1} x$
$(-1 \leq x \leq 1,\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$



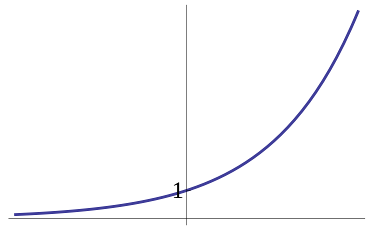
(1-5) $y = \cos^{-1} x$
$(-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi)$



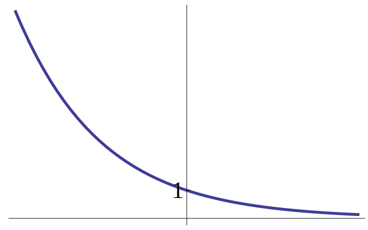
(1-6) $y = \tan^{-1} x$
$(-\infty < x < \infty,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$



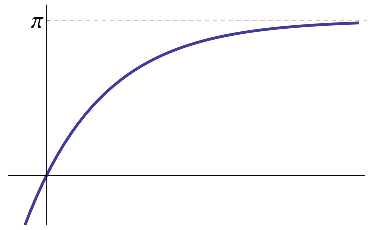
(1-7) $y = e^x$



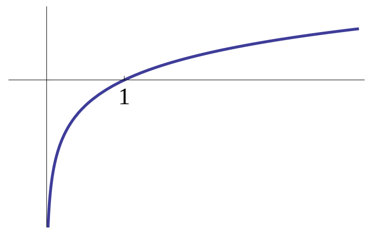
(1-8) $y = e^{-x}$



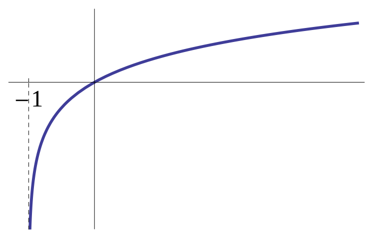
(1-9) $y = \pi(1 - e^{-x})$



(1-10) $y = \log x$



(1-11) $y = \log(1 + x)$

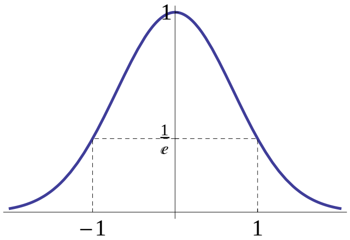


問題 2 以下の関数のグラフを描け．極大極小点がある場合は，その座標も書き込むこと．

(2-1) $y = e^{-x^2}$

$f(-\infty) = f(+\infty) = 0,\ f(0) = 1$

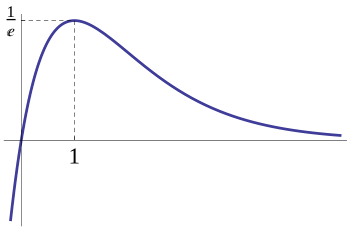
x	$\sim$	0	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$



(2-2) $y = xe^{-x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

x	$\sim$	1	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$



(2-3) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

$f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = 0,\ f(0) = 0$

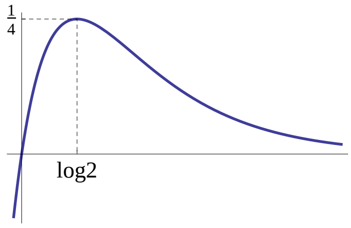
x	$\sim$	$\log 2$	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$

$f'(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x} = e^{-x}(2e^{-x} - 1) = 0$
を解くと，

$$e^{-x} = \frac{1}{2},$$

$$-x = \log\frac{1}{2} = -\log 2,$$

$$x = \log 2.$$



(2-4) $y = x^{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$

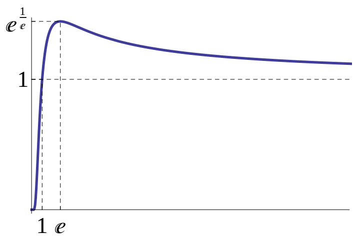
$f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = \log f(x) = \dfrac{\log x}{x}.$

$g(+0) = -\infty,\ g(+\infty) = 0,\ g(1) = 0$

x	$\sim$	e	$\sim$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

$f(+0) = e^{-\infty} = 0,\ f(+\infty) = e^0 = 1,$
$f(1) = e^0 = 1$

x	$\sim$	e	$\sim$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$



問題 3

(3-1) 不等式 $\sin x \geq x - \dfrac{x^2}{\pi}$ が成り立つことを示せ．

関数 $f(x)$ を $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^2}{\pi}$ で定める．$f(x) \geq 0$ を示せばよい．微分を順に計算すると，

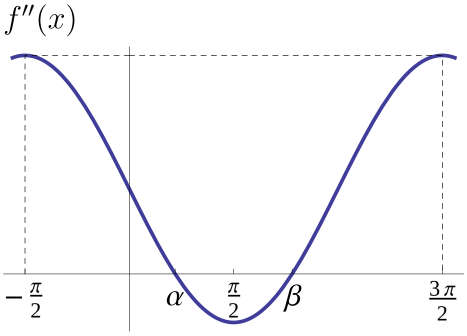
$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x,$$

$$f''(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi}.$$

まず，$f''(x)$ について調べると，

x	$-\pi/2$	$\sim$	α	$\sim$	β	$3\pi/2$
f''	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

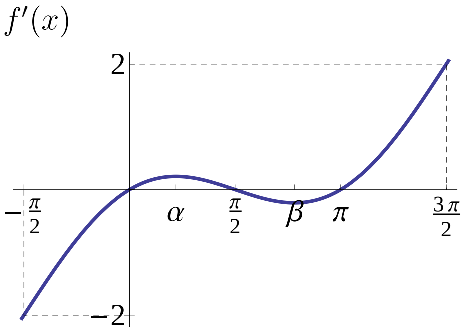
となる．ただし，α と β は $\sin\alpha = \sin\beta = 2/\pi$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\pi/2 < \beta < \pi$ を満たす角度とする．



次に，$f'(x)$ について調べる．$f'(0) = f'(\pi/2) = f'(\pi) = 0$ より，

x	$-\pi/2$	$\sim$	0	$\sim$	α	$\sim$	$\pi/2$	$\sim$	β	$\sim$	π	$\sim$	$3\pi/2$
f''	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	-2	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	2

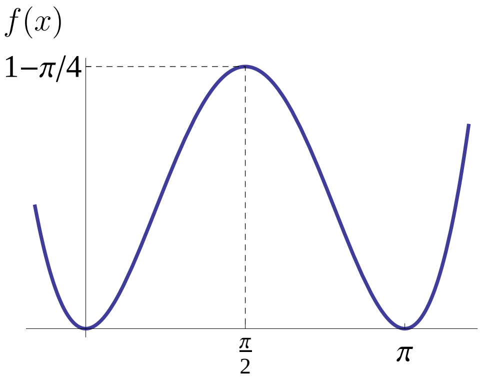
となる．



以上より，$f(x)$ の増減表とグラフを描くと，

x	$\sim$	0	$\sim$	$\pi/2$	$\sim$	π	$\sim$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1-\pi/4$	$\searrow$	0	$\nearrow$

となる．



$x < -\pi/2$ および $x > 3\pi/2$ においては，$-x + x^2/\pi > 1$ なので，常に $f(x) > 0$ となる．以上により題意は示された．

(3-2) 方程式　$\sin x = x - \dfrac{x^2}{\pi}$　の解を全て求めよ．

前問の結果より，$x = 0, \pi$ が全ての解である．

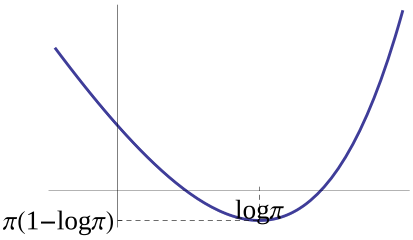
問題 4 方程式 $e^x = \pi x$ の実数解の個数を求めよ.

$f(x) = e^x - \pi x$ とする.

$f(-\infty) = +\infty$, $f(+\infty) = +\infty$, $f(0) = 1$

x	$\sim$	$\log \pi$	$\sim$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\pi(1-\log \pi)$	$\nearrow$

$e < \pi$ より, $\log \pi > 1$ なので, $\pi(1-\log\pi) < 0$ より, $f(x)$ のグラフは x 軸と 2 点で交わるので, 解の個数は 2 個.



問題 5 e^π と π^e の大小関係を調べたい. ただし, $e = 2.71\cdots$, $\pi = 3.14\cdots$ である.

(5-1) $f(x) = x - e\log x \ \ (x > 0)$ のグラフを描き, $f(\pi) > 0$ を示せ.

$$\lim_{x\to+0} f(x) = +0 - e \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - e\frac{\log x}{x}\right)$$

ここで,

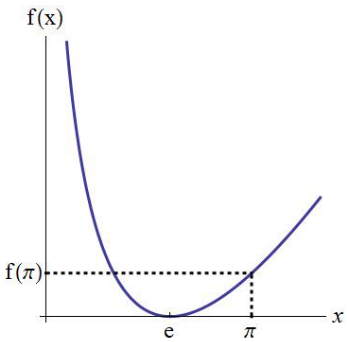
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

なので,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (1-0) = +\infty$$

$f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x}$ より, 増減表を書くと,

x	0	$\sim$	e	$\sim$	$+\infty$
f'	/	$-$	0	$+$	/
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$f(e) = 0$, $x > e$ で $f'(x) > 0$ より, $x > e$ で $f(x) > 0$ である.
したがって, $\pi > e$ より, $f(\pi) > 0$.

(5-2) e^π と π^e の大小関係を決定せよ.

$f(\pi) = \pi - e\log\pi > 0$ より,

$\pi > e\log\pi$ である.

$\pi = \log e^\pi$, $e\log\pi = \log\pi^e$ より,

$\log e^\pi > \log\pi^e$ である.

$\log x$ は $x > 0$ で単調増加関数だから,

$\log e^\pi > \log\pi^e \Longleftrightarrow e^\pi > \pi^e$ である.

問題 6 以下の極限値を計算せよ.

(6-1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \boxed{\infty}$

(6-2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x} = \boxed{0}$

(6-3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x = \boxed{\infty}$

(6-4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \boxed{0}$

(6-5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\{\log(1+x)\}'}{(x)'} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to0}\frac{1}{1+x} = \boxed{1}$

(6-6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\{\log(1+x)-x\}'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1+x}{1+x}}{2x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1-(1+x)}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

(6-7) $\displaystyle\lim_{x\to0}xe^{-x} = \left(\lim_{x\to0}x\right)\left(\lim_{x\to0}e^{-x}\right) = 0\times1 = \boxed{0}$

(6-8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \boxed{0}$

(6-9) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x+1} = \frac{0}{1+1} = \boxed{0}$

(6-10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to0}\frac{(x)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to0}\frac{1}{e^x} = \boxed{1}$

(6-11) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)'}{(3x^2)'}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to0}\frac{(-\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{6} = \boxed{-\frac{1}{6}}$

(6-12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{0+1} = \boxed{1}$

(6-13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{(x+x^2-\sin x)'}{\{(x+x^2)\sin x\}'}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\frac{1+2x-\cos x}{(1+2x)\sin x+(x+x^2)\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{2+\sin x}{2\sin x+2(1+2x)\cos x-(x+x^2)\sin x} = \boxed{1}$